

# Estimativa da dimensão Fractal de figuras planas por meio de um *software* aplicando o método *Box Counting*

Rodrigo Luiz Antoniazzi<sup>1</sup>, Argentino José Aguirre<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Ciências da Computação – Universidade de Cruz Alta (UNICRUZ)  
Caixa Postal 858– 98.020-290 – Cruz Alta – RS – Brasil

<sup>2</sup> Departamento de Ciências Rurais – Universidade Federal de Santa Maria (UFSM)  
Santa Maria – RS - Brasil

{rodrigoantoniazzi@yahoo.com.br, aguirreja25@yahoo.com.br}

**Abstract.** *The geometry fractal was systematized in the decade of 50 by Benoit Mandelbrot, and enter your purposes, it is the classification of objects irregulars. A characteristic of those objects is your dimension fractal that can be fractional. To determine the dimension fractal means to measure the irregularity of objects. In this work was developed a program to esteem the dimension fractal of plane illustrations using the method Box Counting. The developed method was applied to you represent geometric plane, illustrations fractals and also to rings of growth of forest species. The obtained results of the dimension fractal of illustrations classic fractals and of the circumference they didn't have significant differences, at the level of 1%, of the bibliographical values.*

**Resumo.** *A geometria fractal foi sistematizada na década de 50 por Benoit Mandelbrot, e entre suas finalidades, está a classificação de objetos intrincados. Uma característica desses objetos é a sua dimensão, que pode ser fracionária. Determinar a dimensão fractal significa medir a irregularidade de objetos. Neste trabalho desenvolveu-se um programa computacional para estimar a dimensão fractal de figuras planas usando o método Box Counting. O método desenvolvido aplicou-se a figuras geométricas planas, figuras fractais e também a anéis de crescimento de espécie florestal. Os resultados obtidos da dimensão fractal de figuras fractais clássicas e da circunferência não tiveram diferenças significativas, ao nível de 1%, dos valores bibliográficos.*

## 1. Introdução

Muitas formas encontradas na natureza são irregulares e complexas, difíceis de serem estudadas apenas com os conceitos da geometria euclidiana. Assim, no século XX surge a geometria fractal, uma das mais recentes áreas da matemática, com o intuito de explicar diferentes estruturas do mundo real, que não correspondem a figuras geométricas simples e que não seguem leis matemáticas de funções contínuas. As formas que não seguem funções contínuas, geralmente, estão ligadas à natureza, ao desenvolvimento da vida e à própria compreensão do universo. A geometria fractal surgiu com a finalidade de complementar a geometria euclidiana.

A evolução da tecnologia, principalmente da informática e da eletrônica, vem transformando o mundo atual em um sistema altamente informatizado, substituindo, principalmente os trabalhos rotineiros e de esforço do ser humano. Com a possibilidade de realizar milhões de cálculos por segundo, os sistemas computacionais (*hardware* e *software*) podem identificar, classificar e determinar características, transformar em imagens visuais e distinguir diferentes tipos de objetos, de forma rápida e precisa, o que para os seres humanos seriam demorados.

Os fractais foram sistematizados, ao invés de descobertos ou inventados, no início dos anos 50, segundo Gusmán et al. (1993), por Benoit Mandelbrot, para classificar certos objetos intrincados aos quais não é possível atribuir dimensão euclidiana (inteira), havendo a necessidade de introdução de dimensão fracionária, isto é, objetos que não são plenamente bi-dimensionais nem plenamente tri-dimensionais.

A realização deste trabalho consistiu no desenvolvimento de um programa computacional (*software*), em linguagem computacional C++ para ambiente *Microsoft Windows*, para a estimativa da dimensão fractal de figuras geométricas planas, de figuras fractais clássicas e de anéis de crescimento de uma espécie florestal, utilizando o método *Box Counting*.

## **2. Revisão de Literatura**

### **2.1 Geometria Euclidiana e Geometria Fractal**

No final da década de 50, Mandelbrot (1983) começou a estudar a geometria de uma ampla variedade de fenômenos naturais irregulares, e na década de 60 ele compreendeu que todas essas formas geométricas tinham algumas características comuns bastante notáveis. Ao longo de alguns anos, Mandelbrot sistematizou seus estudos dando origem a uma nova matemática para descrever e analisar a complexidade das formas irregulares do mundo que nos rodeia.

Segundo Barbosa (2000), na geometria clássica, o conceito de dimensão usado é o euclidiano. Existem, contudo, figuras geométricas irregulares que não podem ser caracterizadas por dimensões inteiras. Nesse caso, surge a geometria fractal como uma maneira de analisar as irregularidades dessas figuras complexas.

Conforme Barbosa (2000), explica-se a dimensão euclidiana como sendo uma dimensão na qual os objetos são relacionados ao espaço no qual estão inseridos. Assim, retas e curvas têm dimensão 1, o plano (figuras planas) tem dimensão 2 e o espaço (figuras tridimensionais) possui dimensão 3 e, por indução, pode ampliar-se sucessivamente até  $n$  dimensões (espaço euclidiano  $n$ -dimensional).

Conforme Mandelbrot (1991), um número útil para caracterizar fractais é a dimensão fractal  $D_f$ . Esse número quantifica o grau de irregularidade ou de fragmentação de um conjunto geométrico, de uma figura ou de um objeto natural, que pode assumir valores fracionários.

A dimensão euclidiana apresenta sérias limitações para a representação dos fenômenos caóticos da natureza, pois, na maioria das vezes, os fenômenos analisados não se apresentam perfeitamente planos ou como volume, portanto, uma dimensão fracionária caracterizaria melhor o fenômeno, indicando que o sistema é fractal, de acordo com Senesi (1994).

Uma maior dimensão fractal significa que o objeto é mais irregular. Ao aumentar o objeto, percebe-se melhor sua irregularidade e, portanto, a estimativa da dimensão fractal aumenta também, ou seja, esse valor ( $D$ ) é uma medida da proporção do espaço realmente ocupado por um sistema desordenado, podendo refletir a conformação das partículas que o constituem, diz Harrison (1992).

## 2.2 Método *Box Counting* para a estimativa da dimensão fractal

Dentre os vários cálculos, segundo Coelho e Costa (1995), de dimensão fractal existentes, o *Box Counting* é um dos mais utilizados, devido a facilidade de aplicação.

Segundo esses autores, o método de *Box counting*, consiste em dividir a imagem em quadrados e contar quantos quadrados contêm a forma analisada. Aumenta-se ou diminui-se progressivamente o tamanho dos quadrados e repete-se a contagem. Assim, tem-se uma série de dados: números de quadrados e suas dimensões. A fórmula que relaciona a dimensão fractal com esses dados é expressa por:

$$D_f = \frac{\log\left(\frac{N_2}{N_1}\right)}{\log\left(\frac{1/L_2}{1/L_1}\right)} \quad (2)$$

onde:

$D_f$  : dimensão fractal;

$N_i$  : representa o número de quadrados;

$L_i$  : é o comprimento do lado do quadrado  $N_i$ .

A função logarítmica lineariza a função exponencial que permite o cálculo da dimensão fractal.

O método conforme Coelho (1995) é aplicável a qualquer estrutura. A dimensão fractal é dada pelo coeficiente angular da reta obtida por ajuste no gráfico  $\text{Log}(L) \times \text{Log}(N)$ .

## 2.3 Detecção de Bordas

O primeiro passo na análise de imagens é a segmentação, que consiste em usar o computador para definir na imagem recortes automáticos ao redor de objetos de interesse.

A segmentação permite encontrar diferenças entre dois ou mais objetos e distinguir *pixels* (imagem digital matricial) de uma mesma figura. Esta distinção permite dividir uma figura em partes homogêneas.

As bordas podem ser salientadas, em meio computacional, aplicando-se algoritmos específicos para essa finalidade. Um dos algoritmos mais usados para

detecção de bordas é o algoritmo de *Prewitt* aplicando o princípio do vizinho mais próximo, por meio de gradiente de primeira ordem,  $G(x,y)$ .

## 2.4 Limiarização

A limiarização, também conhecida como binarização, consiste, a partir de um *threshold* (limiar), transformar uma imagem em tons de cinza em uma imagem preto e branco (Costa, 2001). Completa-se esta definição de Costa, acrescentando que a limiarização transforma também imagens coloridas em somente tons de preto e branco.

A qualidade de uma imagem limiarizada depende do valor escolhido para o *threshold*. Assim, é importante definir este valor, de forma que a imagem não sofra uma limiarização inadequada para sua aplicação.

O *threshold* pode ser definido de forma visual ou automático, no entanto, a maioria das aplicações requer que seja obtido de forma automática. Desta forma, é necessário empregar alguma técnica de limiarização.

## 3. Métodos e Técnicas

### 3.1 Materiais

Os materiais mais importante para o desenvolvimento do trabalho foram:

#### 3.1.1 Hardware

- Notebook HP Pavillion DV 5237 CL, processador Intel Dual Core 1.83, 2.0 GB de memória RAM, 120 GB de hard disc, 128 MB de placa de vídeo.
- Scanner tamanho A3 Mustek EP
- Câmara fotográfica analógica YASHICA com tripé e provida de nível de bolha. Tamanho 35mm;
- Sombrinhas difusoras de luz com respectivas lâmpadas;
- Lixadora automática para preparação do disco de anéis de crescimento;
- Impressora Multifuncional HP Laser;

#### 3.1.2 Software

- Microsoft Word 2003;
- Borland C++ versão 5.02 (disponibilizado pela UNIFRA)
- MatLab 6.5 R13 (disponibilizado pela UNIFRA)
- Editor Gráfico GIMP 2.2 (disponibilizado pela UNIFRA)

#### 3.1.3 Disco de secção transversal de fuste de espécie arbórea

O disco de fuste utilizado foi da espécie arbórea Pinheiro (*Pinus elliotti*). Oriundo da de floresta de regeneração natural da cidade de Nova Prata.

### 3.2 Métodos

Determinaram-se a dimensão fractal de: circunferência, figuras fractais clássicas e de anéis de crescimento de uma espécie florestal.

Foram escolhidas a circunferência e as figuras fractais clássicas com a finalidade de comparar os resultados obtidos com o valor que consta na bibliografia seguindo o critério seguido por Laux e Aguirre, (2006).

Para as figuras fractais clássicas: tapete e triângulo de Sierpinski, *snow flake* (flocos de neve), curva de *Koch*, curva de *Peano* e a ilha de *Minkowski*, extraídas de Anton (2001), realizou-se o seguinte processo:

- extraíram-se da bibliografia por reprodução xerográfica;
- obtiveram-se 10 cópias pelo mesmo processo de diferentes tamanhos;
- digitalizaram-se as figuras.

A partir das figuras digitalizadas, aplicou-se o processo para obtenção da dimensão fractal calculando-se a respectiva média.

O cálculo da dimensão fractal foi realizado através do método *Box Counting*, descrito por Coelho e Costa (1995), conforme a fórmula (2).

O conjunto de caixas utilizados tem influência direta na contagem obtida, sendo por isso utilizada a caixa inicial com o tamanho máximo da imagem analisada, sendo a caixa seguinte sempre reduzida em 50%.

### **3.2.1 Preparação do disco**

Para que os anéis de crescimento de espécies arbóreas sejam visíveis, foi necessário submetê-lo a um processo de preparação. Este processo foi realizado com o equipamento mecânico específico para tal finalidade e consistiu em lixar a superfície do disco, primeiramente com uma lixa de textura 60 e, posteriormente, com uma lixa de textura 100 para o acabamento final. Uma vez preparado o disco, a tomada da fotografia foi realizada com uma câmara analógica de 35mm com filme de sensibilidade de 100 ASA.

As fotografias foram tomadas em gabinete, com iluminação artificial uniforme, usando sombrinha difusora de luz.

Foram tomadas fotografias verticais. A verticalidade das fotografias foi conseguida nivelando os discos com nível tubular e a câmara montada sobre tripé, nivelada com nível de bolha.

A determinação da dimensão fractal dos anéis de crescimento seguiu os seguintes passos:

- Digitalização
- Limiarização
- Detecção de Bordas
- Escolheram-se 8 anéis no disco distribuídos de maneira a ser representativa no disco;
- A cada anel aplicou-se o *software* calculando-se o valor médio da dimensão fractal.

### **3.2.2 Formatos utilizados para as imagens**

Os formatos utilizados para as figuras digitalizadas no desenvolvimento do software foram, o *bitmap* e o *png*.

### 3.2.3 Parâmetros Estatísticos Aplicados

Estimou-se a dimensão Fractal das figuras geométricas, iterando-se o processo 10 ou 11 vezes.

Como o número de iterações foi inferior a 30, usou-se a distribuição *t de Student*;

- calculou-se a média aritmética;
- calculou-se a variância;
- determinou-se  $S_x^2$  que é o estimador de  $\sigma_x^2$  (estimador do erro padrão – eep);
- calculou-se o intervalo de confiança ao nível de significância  $\alpha = 1\%$ ;

## 4. Resultados e Discussão

A determinação da dimensão fractal de figuras foi realizada com o programa computacional desenvolvido, aplicando o método de *Box Counting* conforme exposto em 3.2. O programa foi aplicado a:

- circunferência;
- figuras fractais clássicas cuja dimensão fractal figura em bibliografia;
- anéis de crescimento de espécie florestal.

Para a determinação da dimensão fractal das figuras, traçaram-se os gráficos logarítmicos respectivos  $\text{Log}(N(L)) \times \text{Log}(1/L)$ . A linearização ajustada dos dados permitiu, por meio do seu coeficiente angular determinar o valor de  $D_f$ .

A seguir, apresentam-se os valores da dimensão fractal da circunferência com diferentes raios.

**Tabela 1 – Dimensão fractal das circunferências: somente perímetro**

Circunferência	Dimensão Fractal	
	Calculada	De origem bibliográfica
Circunferência raio = 3	1,0191627639	1
Circunferência raio = 5	1,0969094613	
Circunferência raio = 7	1,0464165340	
Circunferência raio = 9	0,9804604611	
Circunferência raio = 18	0,9868736947	
Circunferência raio = 20	0,9989682708	
Circunferência raio = 23	0,9755105730	

Circunferência raio = 25	0,9617329595	-
Circunferência raio = 30	1,0154562964	
Média aritmética da circunferência	1,0090545570	
Intervalo de confiança 1%	P(0,9622098966<x<1,055899217)	

O valor médio encontrado da dimensão fractal da circunferência foi de 1,0090545570.

Observa-se que o intervalo de confiança ao nível de 1% abrange o valor bibliográfico correspondente, e considerando-se, até a segunda casa decimal os valores são coincidentes.

Salienta-se que a circunferência, na geometria euclidiana, corresponde a uma dimensão 2 e o valor estimado da dimensão fractal pelo método desenvolvido corresponde a dimensão euclidiana de linhas.

A seguir, apresentam-se os resultados da figura tapete de *Sierpinski*.

**Tabela 2 – Dimensão Fractal do tapete de Sierpinski**

Tapete de <i>Sierpinski</i>	Dimensão Fractal	
	Calculada	De origem bibliográfica
Tapete de Sierpinski 1	1,8881841163	1,8928
Tapete de Sierpinski 2	1,8882602573	
Tapete de Sierpinski 3	1,8692637650	
Tapete de Sierpinski 4	1,8625445293	1,8928
Tapete de Sierpinski 5	1,8656945890	
Tapete de Sierpinski 6	1,8881615264	
Tapete de Sierpinski 7	1,8880324242	
Tapete de Sierpinski 8	1,8986991388	
Tapete de Sierpinski 9	1,8966588258	
Tapete de Sierpinski 10	1,9040112810	
Tapete de Sierpinski 11	1,9050751216	
Média aritmética do Tapete de <i>Sierpinski</i>	1,886780506	-
Intervalo de confiança 1%	P(1,872550074<x<1,901010938)	

A dimensão fractal média do tapete de *Sierpinski* foi de 1,886780506, valor este praticamente igual a 1,8928 da bibliografia, Anton (2001), (os valores seriam iguais se o valor calculado para a dimensão fractal fosse arredondado até a segunda casa decimal) e não diferem significativamente ao nível de 1%. Observa-se também no quadro 2 que o intervalo de confiança abrange o valor bibliográfico.

A dimensão fractal das demais figuras fractais clássicas e suas respectivas dimensões fractais calculadas são apresentadas a seguir.

**Tabela 3 – Dimensão Fractal do triângulo de Sierpinski**

Triângulo de Sierpinski	Dimensão Fractal	
	Calculada	De origem bibliográfica
Triângulo de Sierpinski 1	1,5711984296	1,5849
Triângulo de Sierpinski 2	1,5795473199	
Triângulo de Sierpinski 3	1,5836281455	
Triângulo de Sierpinski 4	1,5838509719	
Triângulo de Sierpinski 5	1,5762367985	
Triângulo de Sierpinski 6	1,5944424587	
Triângulo de Sierpinski 7	1,5740462990	
Triângulo de Sierpinski 8	1,5990853019	
Triângulo de Sierpinski 9	1,5883526726	
Triângulo de Sierpinski 10	1,5871694258	
Média do triângulo de Sierpinski	1,5837557820	-
Intervalo de confiança 1%	P(1,554927526<x<1,612584038)	

**Tabela 4 – Dimensão Fractal da curva de Koch**

Curva de Koch	Dimensão Fractal	
	Calculada	De origem bibliográfica
Curva de Koch 1	1,2886919301	1,2618
Curva de Koch 2	1,2809570355	
Curva de Koch 3	1,2714315597	
Curva de Koch 4	1,2736414278	
Curva de Koch 5	1,2899515527	
Curva de Koch 6	1,2604677381	
Curva de Koch 7	1,2935590469	
Curva de Koch 8	1,2693524885	
Curva de Koch 9	1,2672965785	
Curva de Koch 10	1,2887013973	
Média do triângulo de...	1,2784050760	-



Intervalo de confiança 1%	$P(1,241197926 < x < 1,315612226)$	
---------------------------	------------------------------------	--

Quadro 4 – Dimensão Fractal da curva de Koch

**Tabela 5 – Dimensão Fractal do Snow Flake**

Snow Flake	Dimensão Fractal	
	Calculada	De origem bibliográfica
Snow Flake 1	1,2842212239	1,2618
Snow Flake 2	1,3055752774	
Snow Flake 3	1,2825376303	
Snow Flake 4	1,2606905042	
Snow Flake 5	1,2612175820	
Snow Flake 6	1,2603864917	
Snow Flake 7	1,2719250958	
Snow Flake 8	1,2753660767	
Snow Flake 9	1,2821994121	
Snow Flake 10	1,2707461113	
Média do triângulo de...	1,2754865400	
Intervalo de confiança 1%	$P(1,230013660 < x < 1,320959420)$	-

**Tabela 6 – Dimensão Fractal da Ilha de Minkowski**

A ilha de Minkowski	Dimensão Fractal	
	Calculada	De origem bibliográfica
A ilha de Minkowski	1,4872243024	1,5
A ilha de Minkowski	1,4966122225	
A ilha de Minkowski	1,4990751472	
A ilha de Minkowski	1,5395701250	
A ilha de Minkowski	1,5021822267	
A ilha de Minkowski	1,4909108039	
A ilha de Minkowski	1,4561278842	
A ilha de Minkowski	1,4810843430	
A ilha de Minkowski	1,4889989932	

A ilha de Minkowski	1,5387343522	
Média aritmética da ilha de Minkowski	1,4980520390	-
Intervalo de confiança 1%	P(1,416305141<x<1,579798937)	

**Tabela 7 – Dimensão Fractal da curva de Peano**

Curva de Peano	Dimensão Fractal	
	Calculada	De origem bibliográfica
Curva de Peano	1,7163228567	1,736
Curva de Peano	1,7094340615	1,736
Curva de Peano	1,7353480626	
Curva de Peano	1,7377977804	
Curva de Peano	1,7405483968	
Curva de Peano	1,7292174863	
Curva de Peano	1,7346594815	
Curva de Peano	1,7124269239	
Curva de Peano	1,7461436553	
Curva de Peano	1,7549445224	
Média aritmética da curva de Peano	1,7316843220	-
Intervalo de confiança 1%	P(1,683283859<x<1,780084785)	

As maiores diferenças encontradas entre a dimensão fractal calculada e do valor da bibliografia foram para a curva de *Koch* e para o *snow flake*, porém, estas diferenças não foram significativas, comprovadas pelo teste *t* de *Student* ao nível de 1%. A dimensão fractal das demais figuras fractais clássicas tiveram o mesmo comportamento.

Com a finalidade de testar o método desenvolvido para o cálculo da dimensão fractal para qualquer tipo de figura, escolheu-se anéis de crescimento da espécie florestal *Pinus elliottii*. Nesta aplicação, mostra-se a seqüência que se deve realizar para determinar a dimensão fractal de figuras planas com o programa computacional desenvolvido.

Os módulos da aplicação, a partir da imagem original, consistem: limiarização e detecção de borda.

A imagem original do disco está apresentada na Figura 1.



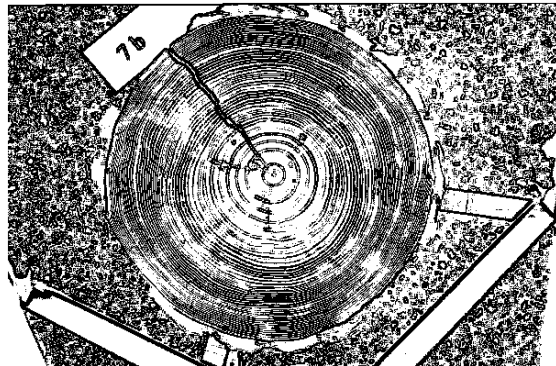
**Figure 1. Imagem original do disco de *Pinus elliottii***

A imagem da Figura 1 submetida ao processo de limiarização resultou na imagem apresentada na Figura 2 (na tela do computador os anéis de crescimento foram observados nitidamente).



**Figura 2. Imagem limiarizada do disco de *Pinus elliottii***

Por último, o processo de detecção de bordas teve como resultado a imagem 3.



**Figura 3. Imagem de saída para processamento do disco de *Pinus elliottii***

Aplicando-se o software desenvolvido para os anéis de crescimento de *Pinus elliottii* obtiveram-se os valores apresentados no quadro 8.

**Quadro 8 – Dimensão fractal calculada dos anéis de crescimento de *Pinus elliottii***

Identificação do disco processado	Dimensão Fractal Calculada
7B	1,1189656400
	1,1610522677
	1,1429153875
	1,1540715828
	1,1657610864
	1,1595704887
	1,1588299010
	1,1307185085
	Média aritmética
Intervalo de confiança 1%	P(1,148018961<x< 1,149952255)

A dimensão fractal dos anéis de crescimento da espécie florestal está compreendida entre 1,148018961 e 1,149952255, com valor médio 1,149952255 e desvio padrão de  $\sigma = 0,000138112$ .

Comparando-se a dimensão fractal obtida para os anéis de crescimento com a dimensão fractal da circunferência, observa-se que esse parâmetro detectou uma maior irregularidade dos anéis de crescimento, haja vista que a dimensão fractal dos anéis de crescimento é maior que a dimensão fractal da circunferência (dimensão fractal da circunferência = 1,0090 e dimensão fractal média dos anéis = 1,149952255). Segundo Mandelbrot (1991), a dimensão fractal é um parâmetro da irregularidade do contorno de uma figura.

Destaca-se que a determinação da dimensão fractal dos anéis de crescimento realizou-se em verdadeira grandeza, e a da circunferência variou-se a medida do raio.

Ao variar o tamanho da circunferência não se observou um aumento significativo da dimensão fractal, portanto, não foi confirmado o afirmado por Viseck (1992), que com o aumento da figura, aumenta a irregularidade e, portanto, sua dimensão fractal. A dimensão fractal da circunferência varia em torno de sua média. Este comportamento atribui-se ao fato de que a circunferência não possui irregularidade.

Não foram encontrados na bibliografia a dispersão dos valores da respectiva dimensão fractal, isto é, não foram fornecidas a precisão com que foram determinadas. Entretanto, nesse trabalho, calculou-se o desvio padrão indicativo da dispersão da estimativa efetuada.

## 5. Conclusão

Neste trabalho, foram realizadas estimativas da dimensão fractal, com o software desenvolvido, da circunferência, de figuras fractais clássicas cuja dimensão fractal está em bibliografia e também de imagens de anéis de crescimento de espécie florestal.

A dimensão fractal média das figuras fractais analisadas não diferiram significativamente ao nível de 1%, do valor que consta na bibliografia.

Assim, conclui-se com 99% de confiança (ou uma chance de erro de 1%) que os valores obtidos encontram-se dentro do intervalo de confiança.

Portanto, o programa desenvolvido, aplicando o método *Box Counting*, apresentou resultado satisfatório.

A dimensão fractal estimada dos anéis de crescimento da espécie arbórea foi de 1,149952255 com desvio padrão de  $\sigma = 0,000138112$ .

O programa desenvolvido não requer um profundo conhecimento de informática, e possui uma amigável interação usuário-máquina.

### 5.1 Recomendações

Recomenda-se determinar a dimensão fractal aplicando-se outras fórmulas como, por exemplo: a de Mandelbrot ( $L(r) = c.r^{1-D}$ ), onde  $L(r)$  = aproximação do comprimento usando-se segmentos de tamanho  $r$ ,  $c$  = constante e  $D$  = dimensão fractal; a fórmula de Lovejoy (1982), denotada por  $P = c\sqrt{A^D}$ , sendo  $P$  = perímetro,  $c$  = constante,  $A$  = área e  $D$  = dimensão fractal.

## 6. Referências

Anton, H.; Rorres, C. (2001) “Álgebra Linear com Aplicações”, Porto Alegre: Bookman.

Barbosa, João L. M. (2000) “Geometria euclidiana plana”, Rio de Janeiro : SBM.

Coelho, R. C; Costa, L. da F. (1995) “The Box-Counting Fractal Dimension: Does it Provide an Accurate Subsidy for Experimental Shape Characterization? If So,How to Use It?”, Anais do Sibgrapi. p. 183-191.

Costa, S. (2001) “Classificação e verificação de impressões digitais”, São Paulo.

Guzmán, M. (1993) “Estructuras Fractales y sus Aplicaciones”, Ed. Labor S. A, Barcelona. Espanha.p. 270.

Lovejoy, S. (1982) “Área-Perimeter Relation for Rain and Clouds Áreas”, Science 216 (9), p. 185-187.

Mandelbrot, B. (1991) “Objectos fractais: forma, acaso e dimensão”, 1.ed. Portugal: Gradiva Publicações LTDA, 296 p.

Mandelbrot, B. (1991) “Objectos Fractais”, Lisboa: Gradiva.

Mandelbrot, B. (1983) “The Fractal Geometry of Nature”, New York, 1983.