

INTERPOLAÇÃO

UNIVATES – CENTRO UNIVERSITÁRIO
ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO

INTERPOLAÇÃO

Acadêmica: Celene de Souza Martinez.
Disciplina: Métodos Numéricos.
Professor: Dr. Claus Haetinger.

LAJEADO, 24 DE NOVEMBRO DE 2006

INTERPOLAÇÃO

A interpolação permite fazer a reconstituição (aproximada) de uma função, apenas conhecendo algumas das suas abscissas e respectivas ordenadas (imagens).

É um método que permite construir um novo conjunto de dados a partir de um conjunto discreto de dados pontuais conhecidos.

Em engenharia e ciência, geralmente tem-se dados pontuais, obtidos a partir de uma amostragem ou experimento.

Através da interpolação pode-se construir uma função que aproximadamente encaixe-se nestes dados pontuais.

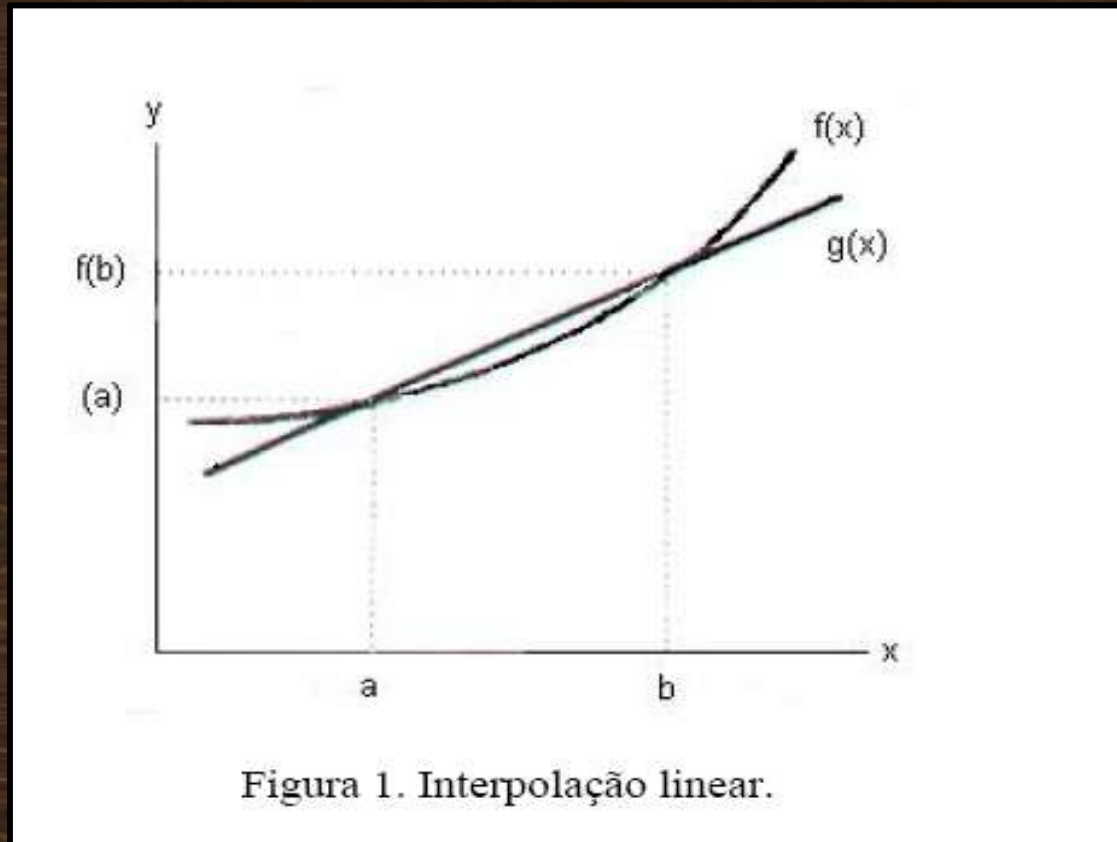
Outra aplicação da interpolação é aproximação de funções complexas por funções mais simples. Suponha que tenhamos uma função, mas que seja muito complicada para avaliar de forma eficiente.

Podemos então, escolher alguns dados pontuais da função complicada e tentar interpolar estes dados para construir uma função mais simples.

Obviamente, quando utilizamos a função mais simples para calcular novos dados, normalmente não se obtém o mesmo resultado da função original, mas dependendo do domínio do problema e do método de interpolação utilizado, o ganho de simplicidade pode compensar o erro.

INTERPOLAÇÃO LINEAR

A interpolação linear é uma linha que se ajusta a dois pontos. A interpolação linear mostrada na Figura 1:



É dada por:

$$g(x) = \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$$

O erro de uma interpolação linear pode ser expresso da seguinte forma:

$$e(x) = \frac{1}{2}(x-a)(x-b)f''(\xi), \quad a < \xi < b$$

Onde ξ é dependente de x em algum lugar entre a e b .

O método fundamental para encontrar uma função que passa por vários pontos de dados (ajustamento de curva) usa um polinômio.

O polinômio de $n - \text{ésima}$ ordem que passa por $n + 1$ pontos é único.

Isso significa, sem considerar a fórmula de interpolação, que todas as interpolações ajustadas para os mesmos pontos são matematicamente idênticos.

INTERPOLAÇÃO POR LAGRANGE

$$\bar{V}_0(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$$

A função V_0 é um polinômio de $n - \text{ésima}$ ordem de x , e torna-se zero em $x = x_1, x_2, \dots, x_n$.

Dividindo $V_0(x)$ por $V_0(x_0)$, resulta na função:

$$V_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\dots(x_0 - x_n)}$$

A fórmula de interpolação de Lagrange de ordem n derivada dessa forma pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} g(x) = & \frac{(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_n)} f_0 \\ & + \frac{(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\dots(x - x_n)} f_1 \quad (2) \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\dots(x_n - x_{n-1})} f_n \end{aligned}$$

INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

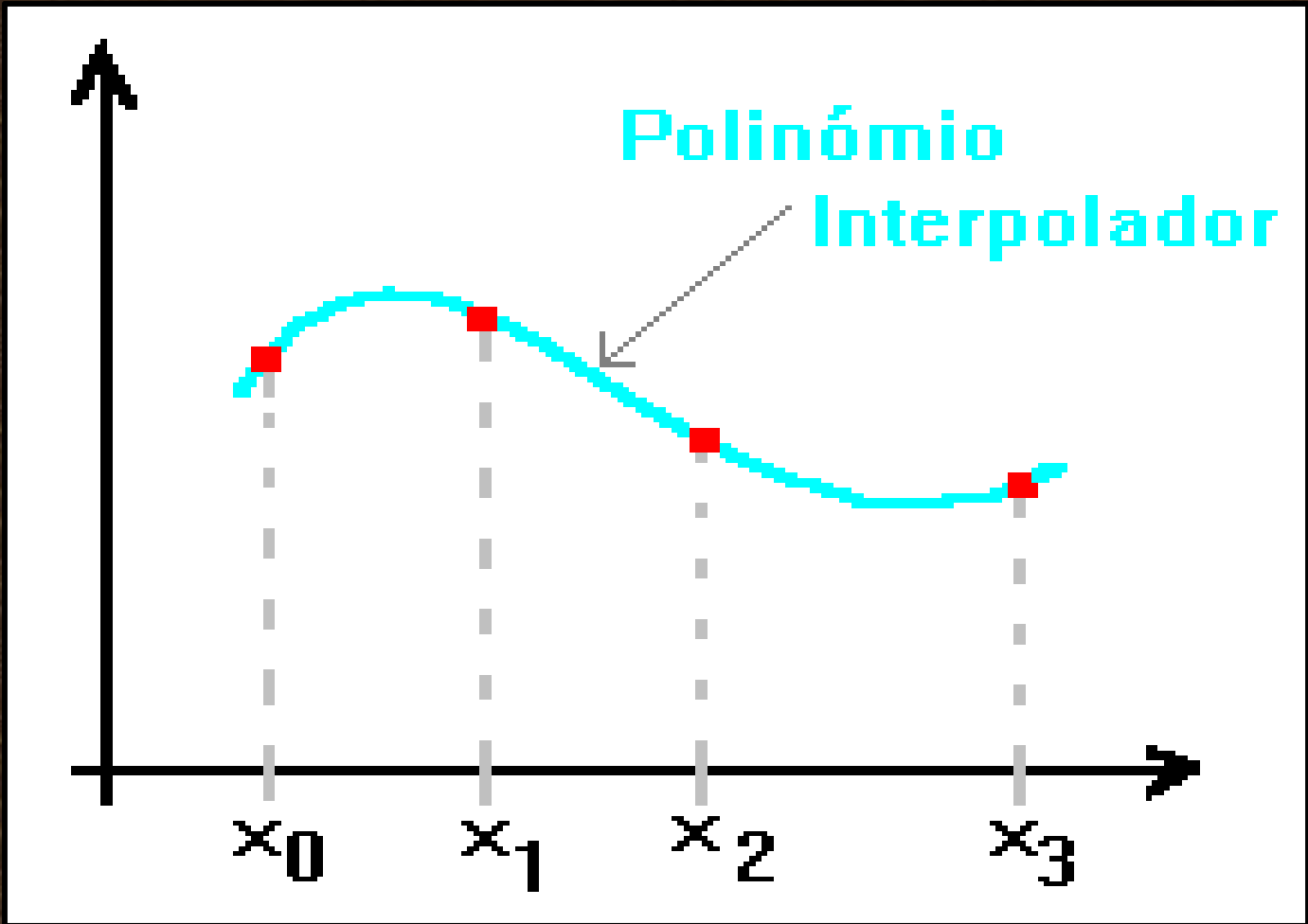
Diz-se Interpolação polinomial quando a função interpoladora é um polinômio.

Chama-se de interpolação o processo de avaliar:

$$f(x), x \in [a, b]$$

Substituindo a função $f(x)$ por uma função $F(x)$, da qual se conhecem os valores nos pontos de abscissas.

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, x_n \in [a, b]$$



INTERPOLADORES NA FORMA DE NEWTON

Considerando o Polinômio de grau $n-1$:

Dados $n+1$ pontos $(x_k, f(x_k))$, $k = 0, \dots, n$, distintos 2 a 2, o polinômio de grau n :

$$P_n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)\dots(x - x_{n-1})$$

É o polinômio interpolador na forma de Newton se:

$$P_n(x_k) = f(x_k), k = 0, \dots, n$$

Os coeficientes a_k podem ser obtidos a partir dessas igualdades:

$$P_n(x_0) = a_0$$

$$P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0)$$

$$a_0 = f(x_0)$$

$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Denomina-se diferença dividida de primeira ordem, e introduzindo essa definição nas fórmulas acima, podemos obter os a_k 's apenas com manipulações algébricas de x_k 's e $f(x_k)$'s. Se nós escolhermos a_i tal que todas as coordenadas f_i dos $n+1$ pontos sejam iguais a $P(x_i)$, chegaremos à conclusão de que os a_i serão determinados pelo que chamaremos de diferenças divididas.

O principal problema dos polinômios interpoladores nas formas de Newton e Lagrange é o erro que aumenta significativamente próximo dos extremos.

Estamos considerando o erro definido por:

$$EA(x_i) = f(x_i) - p(x_i)$$

ERROS DE INTERPOLAÇÃO

Caso haja um conhecimento suplementar da função que pretende interpolar (para além do valor nos nós de interpolação), por exemplo, se tivermos majorações do valor da derivada de ordem n , num intervalo que contenha os nós, podemos estabelecer majorações para o erro de interpolação.

O erro de interpolação, num certo ponto x , é:

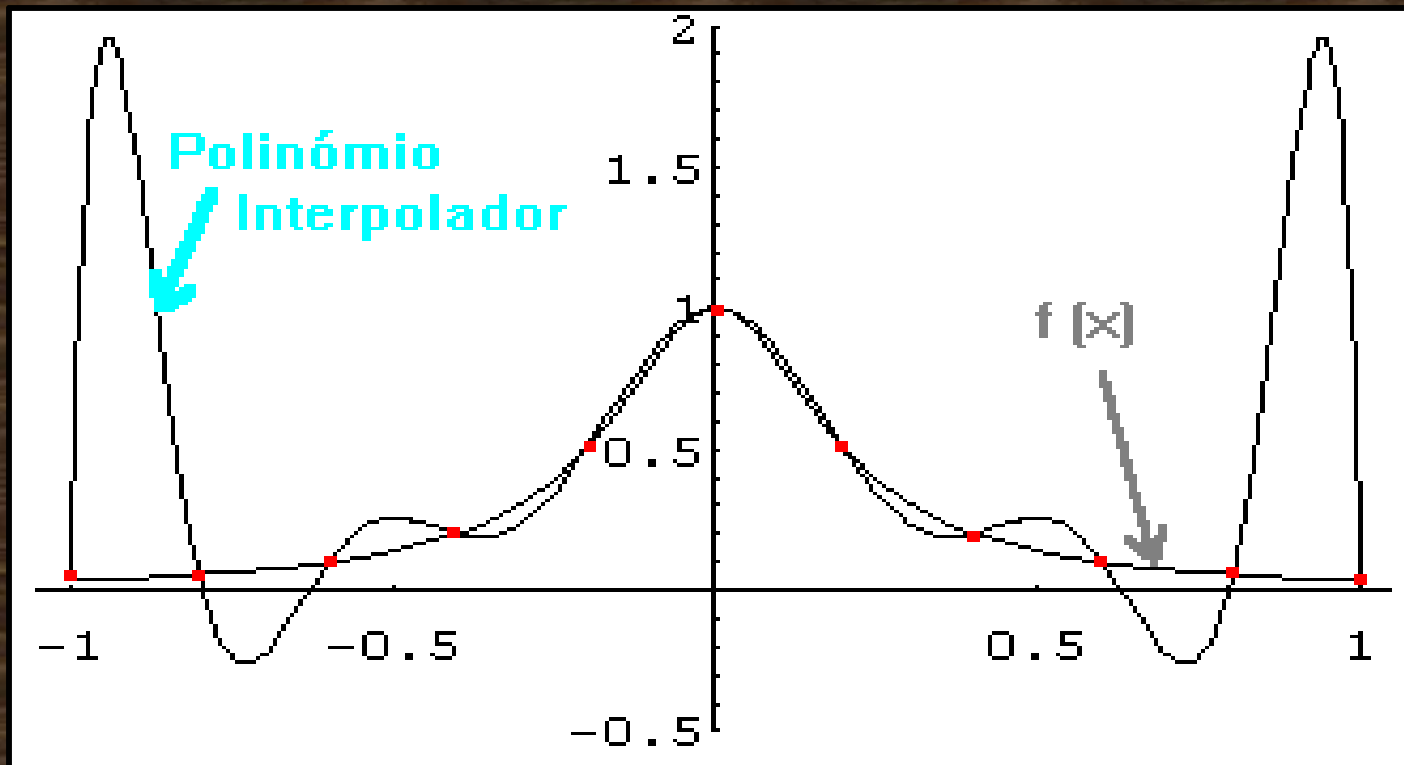
$$e_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

É claro, que se x for um dos nós, o erro é zero!

A seguir temos o exemplo de uma função em que a aproximação, por interpolação polinomial, pode conduzir a maus resultados.

Se considerarmos a função $f(x) = (1 + 25x^2)^{-1}$, e pensarmos em interpolá-la no intervalo $[-1, 1]$, usando nós igualmente espaçados.

Ao aumentarmos o número de nós, em vez de obtermos uma melhor aproximação, vamos obter uma aproximação cada vez pior, nas extremidades do intervalo!



Exemplo de Runge: $f(x) = (1 + 25x^2)^{-1}$
usando 11 nós de interpolação igualmente espaçados.

FENNA!!!