UNIVATES – Centro Universitário
Disciplina: Métodos Numéricos
Professor: Claus Haetinger

KRIGAGEM

Alunos:
Afrânio das Neves Costa Filho
Cristiane Scheeren
Diego Ely Lange
Valmir Zanatta

Introdução

- **Krigagem** pode ser entendida como uma predição linear ou uma forma da Interferência bayesiana. Parte do princípio que pontos próximos no espaço tendem a ter valores mais parecidos do que pontos mais afastados.

- A técnica de **Krigagem** assume que os dados recolhidos de uma determinada população ou local se encontram correlacionados no espaço.

- Isto é, se um ar-condicionado pequeno em uma sala grande faz vento com temperatura de 20°, é muito provável que se encontrem temperaturas muito próximas de 20° quanto mais próximos se estiver do aparelho (princípio da geoestatística).

- Porém, a partir de determinada distância do ar-condicionado, certamente não se encontrarão valores aproximados de 20° porque a correlação espacial pode deixar de existir.

Considera-se o método de **Krigagem** do tipo **BLUE** (**B**est **L**inear **U**nbiased **E**stimator - Melhor Estimador Linear não-Viciado):

- Linear porque as suas estimativas são combinações lineares ponderadas dos dados existentes;

- Não viciada pois procura que a média dos erros (desvios entre o valor real e o valor estimado) seja nula;

- É a melhor porque os erros de estimação apresentam uma variação (variância de estimação) mínima.

O termo **Krigagem** abrange um conjunto de métodos, sendo os mais usuais os seguintes: Krigagem Simples e Krigagem Ordinário.

Krigagem Simples

Assume que as médias locais são relativamente constantes e de valor muito semelhante à média da população que é conhecida. A média da população é utilizada para cada estimação local, em conjunto com os pontos vizinhos estabelecidos como necessários para a estimação.

Krigagem Ordinária

As médias locais não são necessáriamente próximas da média da população usando-se apenas os pontos vizinhos para a estimação. É o método mais usado em problemas ambientais.

No processo básico da Krigagem Ordinária a estimativa é feita para determinar um valor médio em um local não amostrado.

Pode-se, porém, fazer estimativas baseadas em valores que se situam acima ou abaixo de um determinado nível de corte (cutoff).

Este procedimento, estabelecido para vários níveis de corte de uma distribuição acumulada, conduz a uma estimativa de vários valores dessa distribuição em um determinado local, cuja função poderá ser ajustada.

Ocorre, portanto, uma transformação não linear sobre o conjunto de dados amostrais, denominada codificação por indicação.

CoKrigagem

É uma extensão da anterior a situações em que duas ou mais variáveis são espacialmente dependentes e a variável que se quer estimar não está amostrada com a intensidade com que estão as outras variáveis dependentes, utilizando-se os valores destas e as suas dependências para estimar a variável requerida.

Conceitos matemáticos

O **Método de Krigagem** utiliza-se de diversas teorias explanadas na estatística. No entanto, para ficarem mais claras as teorias de estatística usadas e mais direcionadas ao escopo deste trabalho, colocaremos alguns conceitos.

Semi-variância e semi-variograma

A **semi-variância** é a medida do grau de dependência espacial entre duas amostras. A magnitude da semi-variância entre dois pontos depende da distância entre eles, implicando em semi-variâncias menores para distâncias menores e semi-variâncias maiores para distâncias maiores.

O gráfico das semi-variâncias em função da distância a um ponto é chamado de **Semi-variograma**.

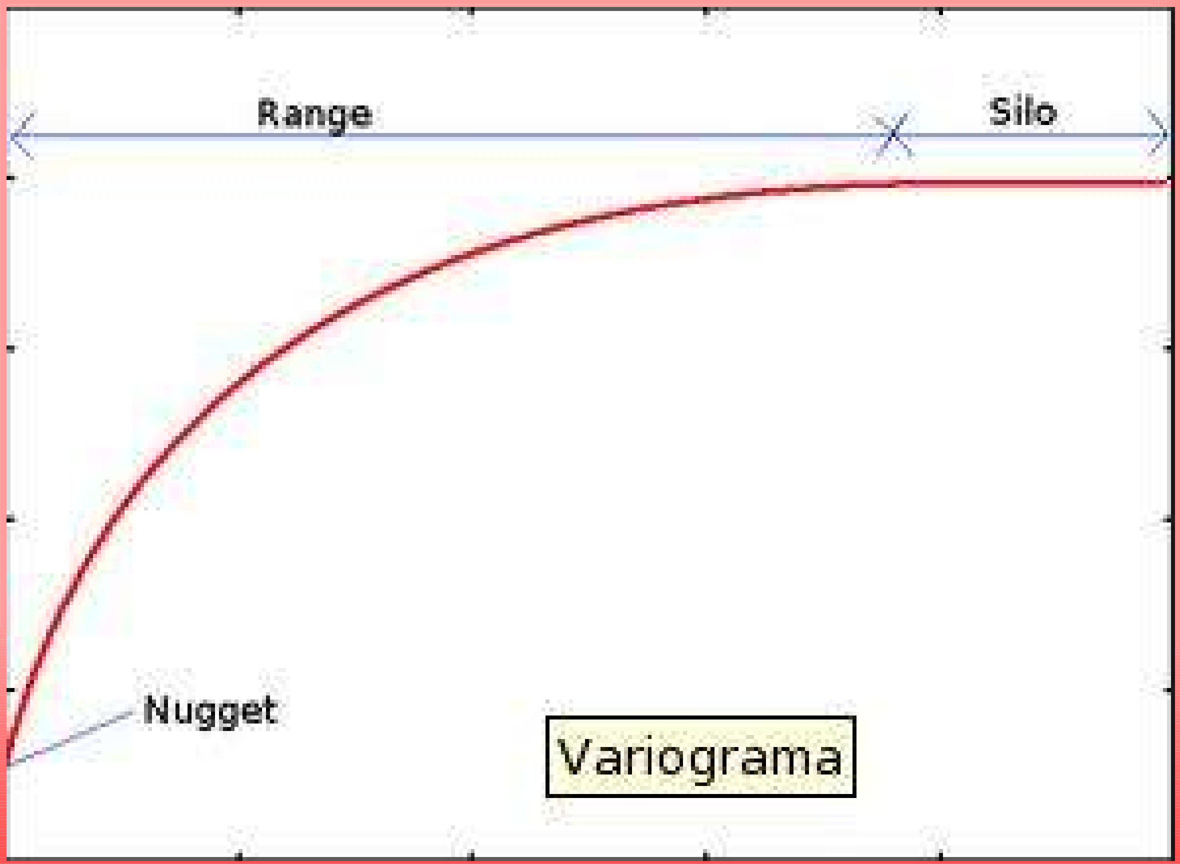
A partir de uma certa distância a semi-variância não mais aumentará com a distância e se estabilizará num valor igual à *variância média*, dando a esta região o nome de **silo** (*sill*).

A distância entre o início do semi-variograma e o começo do silo recebe o nome de ***range***.

Ao extrapolarmos a curva do semi-variograma para a distância zero, podemos chegar a um valor não-nulo de semi-variância.

Este valor recebe o nome de **Efeito *nugget*** (*Nugget Effect*).

Gráfico do semi-variograma



Modelos de Variograma

No **Método de Krigagem** normalmente são usados quatro tipos de **variogramas**. Neles, são usadas as seguintes variáveis:

- v: variância
- Co: nugget
- a: silo
- Co + c: variância assintótica
- h: distância de separação

Modelos de Variograma

- Linear

Este modelo não apresenta **silo** e é muito simples. Sua curva pode ser representada por:

$$v = Co + ch$$

- Esférico

A forma esférica é a mais utilizada e possui silo. Sua forma é definida por:

$$v = \begin{cases} c_0 + c[1.5(\frac{h}{a}) - 0.5(\frac{h}{a})^3], & \text{se } h < a \\ c_0 + c, & \text{se } h > a \end{cases}$$

- Exponencial

A curva do variograma exponencial respeita a seguinte equação:

$$v = c_0 + c\left(1 - e^{\frac{-h}{b}}\right)$$

- Gaussiano

A forma gaussiana é dada por:

$$v = \begin{cases} c_0 + c\left(1 - e^{\frac{-h^2}{a^2}}\right), & \text{se } h < a \\ c_0 + c, & \text{se } h > a \end{cases}$$

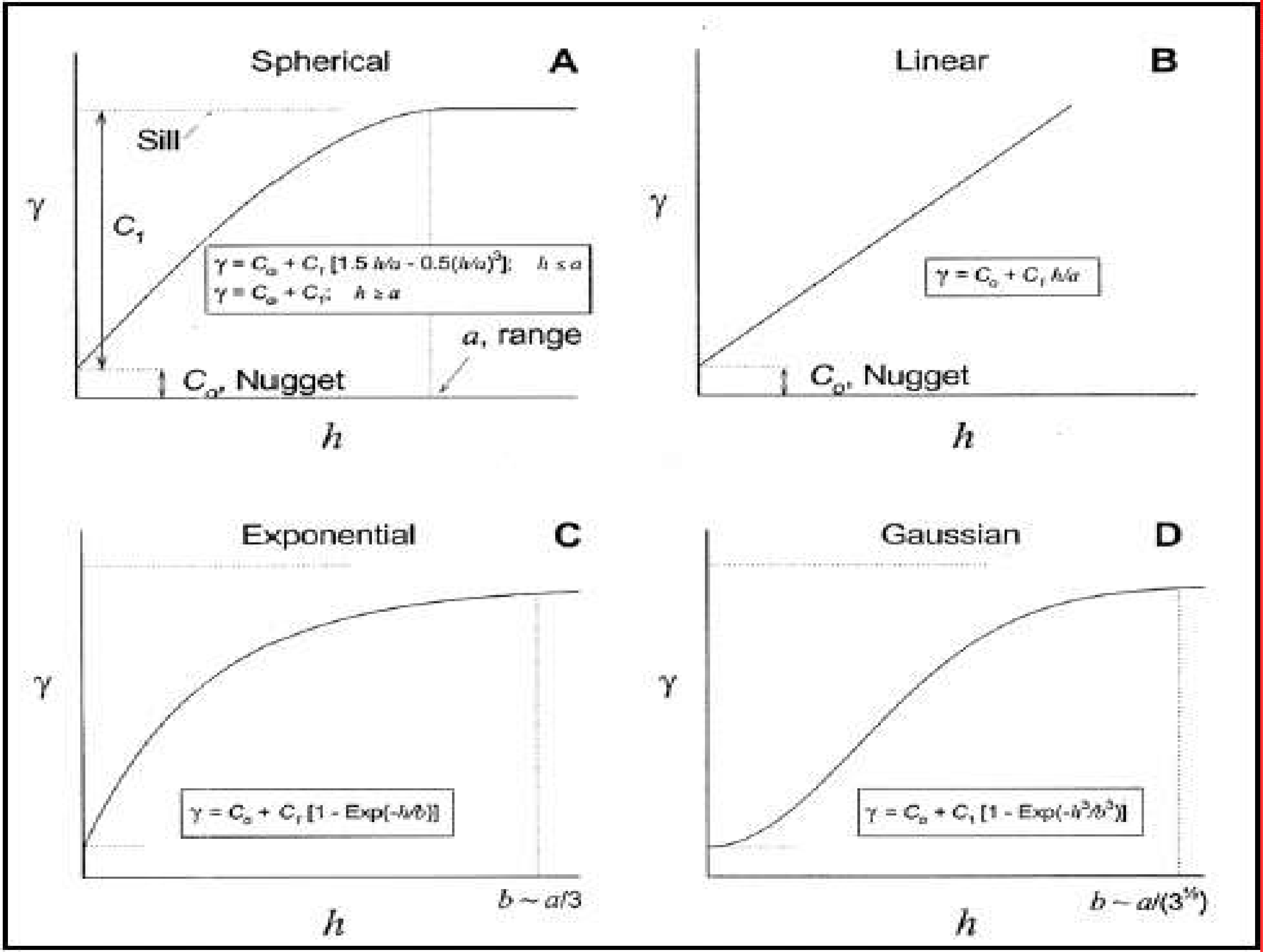


Figura 1: Componentes e Modelos do Variograma.
Fonte: Lembo e Magri (2002)

Determinação do Semivariograma

Toma-se como base a simulação de um sistema de duas dimensões (2D) que contém um número finito de pontos onde é possível a medição de uma grandeza qualquer. Após a adquisição destes dados, inicia-se a interpolação por Krigagem buscando alcançar uma maior resolução.

O primeiro passo é construir um **semivariograma experimental**. Para tal, calcula-se a semivariância de cada ponto em relação aos demais e insere-se no gráfico da semivariância pela distância.

$$v(h = d_{ip}) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} (f_i - f_p)^2$$

Cálculo dos Pesos

Considere, para o cálculo da **Krigagem**, a seguinte fórmula:

$$F(x,y) = \sum_{i=1}^{n} w_i f_i$$

Onde:

- *n* é o número de amostras obtidas;
- f_i é o valor obtido no ponto *i;*
- w_i é o peso designado ao ponto *i*.

A fim de obter os pesos de cada um dos *n* pontos, para cada um deles é realizado um cálculo de $w_1, w_2, \ldots, w_n$.

Tal procedimento depende do tipo de **Krigagem** que está sendo utilizado. Salienta-se a seguinte notação:

- W_j: peso do *j-ésimo* ponto
- $S(d_{ij})$: valor da semi-variância de d_{ij}
- λ: variável temporária

Krigagem Simples

Para este caso, utiliza-se a média de todos os dados. Implica-se, portanto, em não se normalizar a média local dos pesos, como no caso anterior. Assim, teremos quase que a mesma equação, exceto pela exclusão de λ e pela última equação.

A característica principal deste método é a geração de gráficos mais lisos e mais esteticamente suaves. Deve-se salientar que este caso é menos preciso que o caso anterior.

Os valores dos pesos para o *p-ésimo* ponto serão dados por:

$$\begin{cases} w_1 S(d_{11}) + w_2 S(d_{12}) + \ldots + w_n S(d_{1n}) = S(d_{1p}) \\ w_1 S(d_{21}) + w_2 S(d_{22}) + \ldots + w_n S(d_{2n}) = S(d_{2p}) \\ \wr \\ w_n S(d_{n1}) + w_2 S(d_{n2}) + \ldots + w_n S(d_{nn}) = S(d_{np}) \end{cases}$$

Krigagem Ordinária

Neste caso é utilizado a média local dos pontos amostrados. Portanto, deve-se normalizar a média dos pesos. Conseqüentemente, tem-se um resultado mais preciso do que a Krigagem Simples.

Utiliza-se as seguintes equações para a determinação dos valores dos pesos no *p-ésimo* ponto:

$$\begin{cases} w_1 S(d_{11}) + w_2 S(d_{12}) + \ldots + w_n S(d_{1n}) + \lambda = S(d_{1p}) \\ w_1 S(d_{21}) + w_2 S(d_{22}) + \ldots + w_n S(d_{2n}) + \lambda = S(d_{2p}) \\ \wr \\ w_n S(d_{n1}) + w_2 S(d_{n2}) + \ldots + w_n S(d_{nn}) + \lambda = S(d_{np}) \\ w_1 + w_2 + \ldots + w_n = 1 \end{cases}$$

Obtendo o Ponto Interpolado

Ao obtermos os valores de $w_1, w_2, ..., w_n$, calcula-se o valor de f_p:

$$f_p = w_1 f_1 + w_2 f_2 + ... + w_n f_n$$

Desta maneira, calcula-se o valor interpolado para todos os pontos desejados. Ressalta-se que somente devem ser utilizados os valores adquiridos acima.

Interpolando Outros Pontos

A obtenção do valor interpolado em um outro ponto requer a repetição de todos os cálculos realizados a partir da obtenção do modelo de variograma.

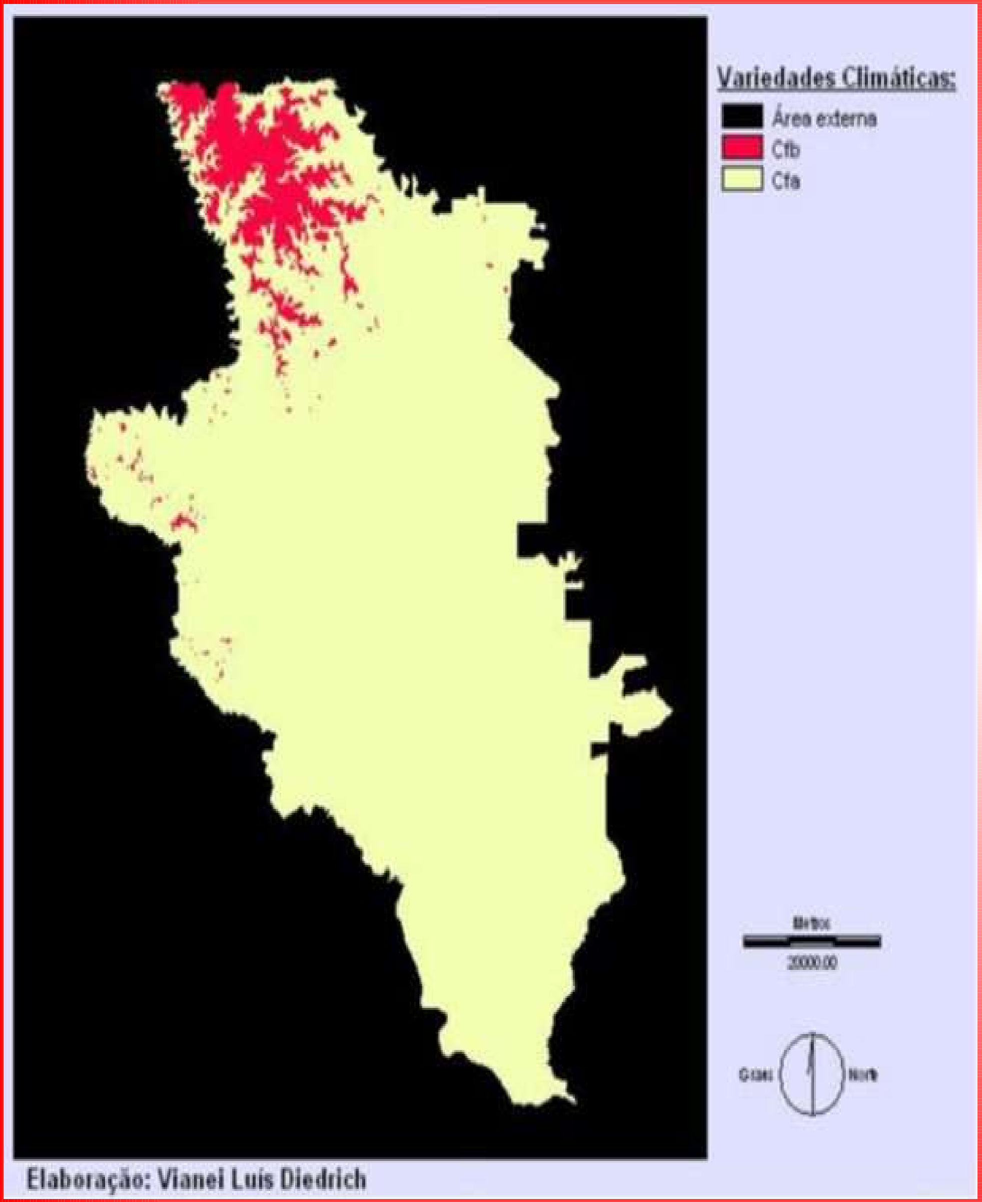
Desta forma, para aumentarmos a resolução que é pretendida, deve-se recorrer à métodos matemáticos para a resolução computacional.

Diversos códigos foram desenvolvidos para esta resolução e um exemplo de utilização é o Software SPRING.

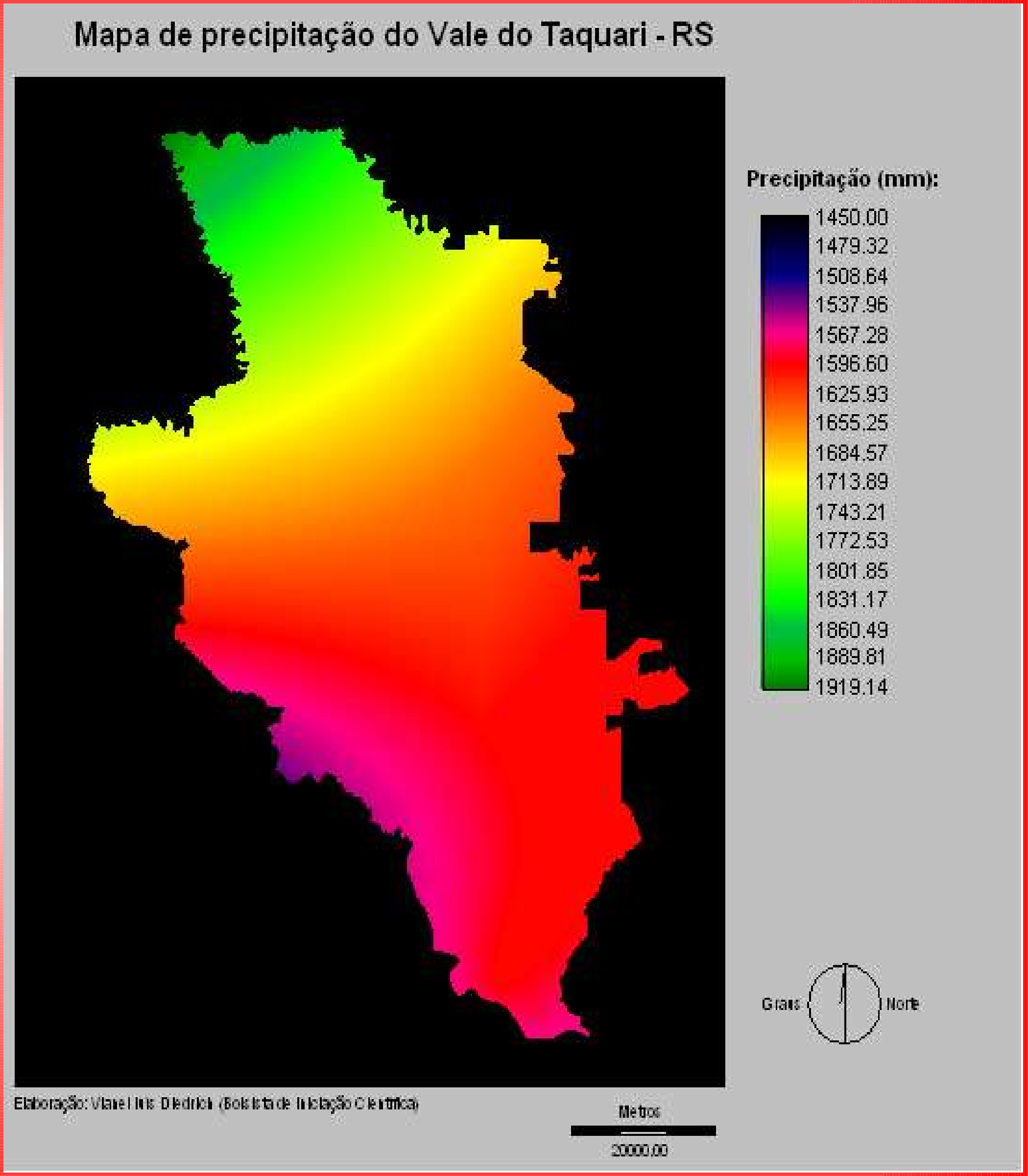
O **SPRING** é um SIG (**S**istema de **I**nformações **G**eográficas) com funções de processamento de imagens, análise espacial, modelagem numérica de terreno e consulta a bancos de dados espaciais.

Ele foi feito com o objetivo de construir um sistema de informações geográficas para aplicações em Agricultura, Floresta, Gestão Ambiental, Geografia, Geologia, Planejamento Urbano e Regional.

Este software é utilizado no projeto de pesquisa "Zoneamento Agroclimático do Vale do Taquari", desenvolvido pelo Centro de Informações Hidrometeorológicas da UNIVATES.



Variedades Climáticas:
Área externa
Cfb
Cfa
20000.00
Elaboração: Vianei Luís Diedrich



Mapa de precipitação do Vale do Taquari - RS
Precipitação (mm):
1450.00
1479.32
1508.64
1537.96
1567.28
1596.60
1625.93
1655.25
1684.57
1713.89
1743.21
1772.53
1801.85
1831.17
1860.49
1889.81
1919.14
Norte
Metros
20000.00

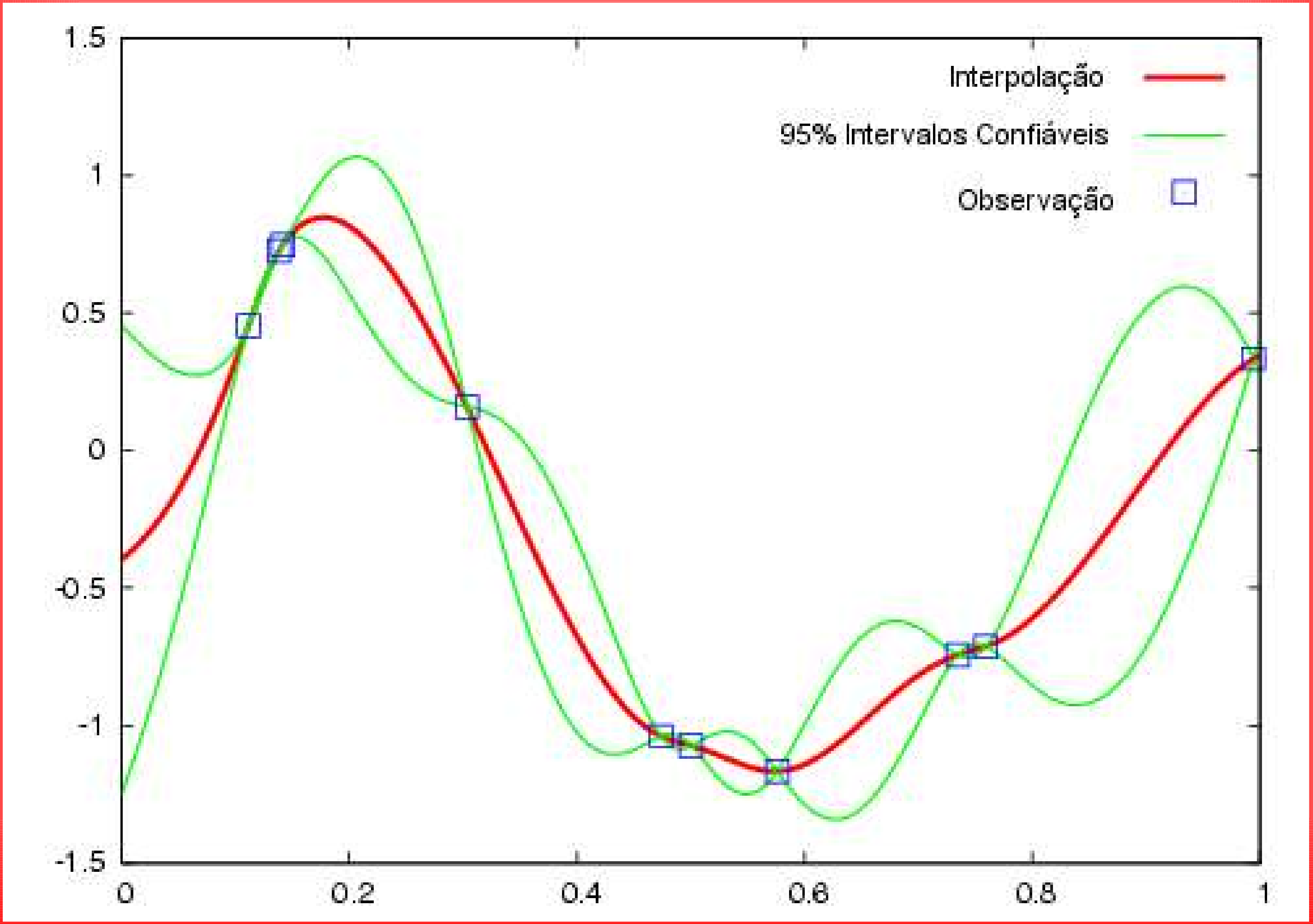
Interpolando Outros Pontos

Segundo Gary Brooker (1979), as técnicas geoestatísticas de estimativa, baseadas no estudo da variabilidade espacial do corpo de minério, são superiores porque permitem o cálculo do erro associado as estimativas, chamado variância de krigagem.

Ainda conforme o mesmo autor, a krigagem é o procedimento que permite calcular os ponderadores para uma dada configuração (bloco X disposição das amostras no espaço), com mínima variância de krigagem.

A krigagem é feita após a conclusão dos estudos geoestatísticos, os quais poderão inclusive indicar a não aplicação deste método se o comportamento da variável regionalizada for totalmente aleatório.

Exemplo de Krigagem:



<u>Obrigado pela atenção!</u>