

PROGRAMAÇÃO SIMBÓLICA E TEORIA DE AUSUBEL NO APRENDIZADO DE MÉTODOS NUMÉRICOS

Gilson P. do Carmo Filho¹, Júlio Wilson Ribeiro² e Daniel de H. Gonçalves³

Resumo — Utilizam-se a teoria de aprendizagem de Ausubel e programação simbólica para desenvolver no software Mathematica um ambiente informatizado, que permite ao aprendiz progressiva e interativamente construir o raciocínio físico-matemático, com aplicação no processo de resfriamento do epoxy. Contempla-se a solução de equações diferenciais parciais, selecionando-se três métodos: separação de variáveis, de caráter analítico, e dois puramente numéricos, Êuler e Crank-Nicolson. Ilustrativamente, utilizam-se recursos gráficos e tabelas para enfatizar a análise e comparação da precisão dos resultados numéricos obtidos e também a interpretação física, através do comportamento dos perfis de temperatura.

Palavras Chave — Ambientes Informatizados de Aprendizagem, Métodos Analíticos e Numéricos em Equações Diferenciais Parciais, Programação Simbólica, Teoria de Aprendizagem de Ausubel.

INTRODUÇÃO

Um dos grandes desafios no processo de ensino-aprendizagem na disciplina cálculo numérico, concentra-se no tópico tratamento e solução de equações diferenciais. Tradicionalmente, o conteúdo disciplinar é disponibilizado em material impresso, o que desde já se caracteriza como informação estática [2]. Outro aspecto é que alunos de determinados cursos de graduação apresentam, em média, maior dificuldade em construir o raciocínio abstrato físico-matemático. Isto pode ser notado quando o professor deseja analisar no quadro a interpretação física de problemas associados às equações diferenciais, o que pode causar, em alguns alunos, determinadas dificuldades e, conseqüentemente, perderem motivação pela disciplina.

A incorporação de recursos computacionais, sob uma ótica da informática educativa, se mostra bastante promissora no sentido de tornar o contato com a informação um processo dinâmico e interativo [6][9], propiciando alternativas para se estabelecer novos recursos pedagógicos. Vale também se ressaltar o aprendizado à distância, conforme os novos avanços nas redes de comunicação de dados. Aliado a isto, enfatizam-se os avanços na velocidade de processamento dos computadores, o que permite a viabilidade do uso de novas linguagens e técnicas de programação. Nesta direção, aponta-se a programação

simbólica, que propicia a equipes interdisciplinares produzirem *software* educativo, visando facilitar a construção do processo de aprendizado em diversas disciplinas dos cursos de ciências exatas [2][6]. É proposto que o aluno passe a trabalhar num ambiente informatizado de aprendizagem, que integradamente permite correlacionar conceitos físicos-matemáticos, manipular e resolver analiticamente equações diferenciais, disponibilizar soluções via tabelas, gráficos e animações, realizar testes de avaliação do conteúdo programático, permitindo também modificar, *on-line*, a entrada/saída de dados numéricos ou formulações analíticas, caracterizando assim um aprendizado personalizado, com valorização da autonomia [2][6][8].

A disponibilidade dos Sistemas de Computação Simbólica (SCS) é um aspecto extremamente relevante no uso do computador para o estudo dessas equações, uma vez que são capazes de efetuar, entre outras coisas, as operações analíticas envolvidas na resolução das mesmas [7]. Após determinado progresso, o estudante pode atribuir a maior parte dos estágios das manipulações algébricas ao computador, reservando mais tempo para dedicar maior atenção à interpretação física dos resultados obtidos.

Cita-se a natural extensão do aprendizado em cálculo numérico para os métodos híbridos analítico-numéricos conjugados à programação simbólica, o que permite obter soluções melhoradas em problemas avançados de sistemas de equações diferenciais parciais com contorno fortemente acoplados [3][7].

Diante deste panorama, se propõe uma nova abordagem de ensino do cálculo numérico voltado para as equações diferenciais, onde sejam combinados recursos computacionais oferecidos pelos SCS, métodos da matemática computacional e fundamentos das teorias de aprendizagem.

O uso dos SCS nas atividades de ensino e pesquisa pode reduzir significativamente o trabalho necessário para o desenvolvimento de cálculos analíticos, eliminando assim tediosos e desnecessários esforços de concentração mental, associados à manipulação de extensas expressões matemáticas repetitivas e mecânicas. Como conseqüência, é possível se obter um tratamento analítico mais rápido, recursivo e confiável [7].

Vale ressaltar porém, que a principal função desse novo aparato educacional não deve ser a de ensinar, mas sim a de criar condições de aprendizagem, onde o professor deve

¹ Gilson P. do Carmo Filho, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEE), Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, CE, Brasil, gilsonfilho@timnet.com

² Dr. Júlio Wilson Ribeiro, Laboratório OMNI-DC e PPGEE, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, CE, Brasil, juliow@uol.com.br

³ Daniel de H. Gonçalves, Laboratório OMNI-DC, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, CE, Brasil, danielhol@bol.com.br

deixar de ser o repassador do conhecimento e se tornar o criador de ambientes de aprendizagem e facilitador do processo de desenvolvimento intelectual do aluno [9].

A TEORIA DE AUSUBEL

O conceito central da teoria de David P. Ausubel [1] é a **aprendizagem significativa**, um processo através do qual uma nova informação relaciona-se com um aspecto especificamente relevante da estrutura de conhecimento do indivíduo. Este processo envolve a interação da nova informação com uma estrutura de conhecimento específica existente na estrutura cognitiva do indivíduo, a qual Ausubel define como **subsunçor**. A aprendizagem significativa ocorre quando a nova informação ancora-se em conceitos ou proposições relevantes, preexistentes na estrutura cognitiva do aprendiz. Ausubel vê o armazenamento de informações no cérebro humano como sendo organizado, formando uma hierarquia conceitual, na qual elementos mais específicos de conhecimento são ligados e assimilados a conceitos mais gerais, mais inclusivos [4]. Este processo de "ancoragem" da nova informação resulta em crescimento e modificação do subsunçor.

Para o desenvolvimento de conceitos subsunçores, Ausubel recomenda o uso de **organizadores prévios**, que são materiais introdutórios apresentados antes do assunto a ser aprendido. Segundo o próprio Ausubel, a principal função do organizador prévio é a de servir de ponte entre o que o aprendiz já sabe e o que ele deve saber, a fim de que o novo assunto possa ser aprendido de forma significativa. O uso desses organizadores, portanto, é uma estratégia para manipular a estrutura cognitiva e, assim, facilitar a aprendizagem significativa. Organizadores prévios, contrariamente a sumários, são apresentados em um nível mais alto de abstração, generalidade e inclusividade.

Uma das condições para a ocorrência da aprendizagem significativa é que o material a ser aprendido seja relacionável (ou incorporável) à estrutura cognitiva do aprendiz. Essa condição implica em que o aprendiz tenha disponível em sua estrutura cognitiva os subsunçores adequados. A outra condição é que o aprendiz manifeste uma disposição para relacionar de maneira substantiva e não-arbitrária o novo material à estrutura cognitiva [4].

DESENVOLVIMENTO

A metodologia apresentada a seguir está estruturada para a resolução e interpretação física de um problema de equação diferencial parcial (EDP), do tipo parabólica, que representa uma vasta gama de modelos físicos de diferentes áreas do conhecimento. Numa visão matemática e pedagógica, o aprendiz deverá trabalhar a solução da EDP num ambiente informatizado de aprendizagem, segundo as duas classes de métodos mencionados. Numa fase posterior, poderá navegar em gráficos e tabelas que ilustram o comportamento e convergência da solução, comparando os métodos utilizados. *Links*, botões e questões direcionadas ao acompanhamento

da avaliação da aprendizagem permitem refinar dinamicamente a sistemática do aprendizado autônomo.

O tratamento do problema, segundo métodos híbridos analítico-numéricos, segue a abordagem pedagógica apresentada em [5], quando se adota o método de separação de variáveis (MSV). Para os métodos puramente numéricos, selecionaram-se Euler, que é explícito, e Crank-Nicolson, semi-implícito, segundo uma ótica de pedagogia utilizada em [5], cujo livro é adotado pela Open University, do Reino Unido, uma das mais tradicionais instituições mundiais de ensino à distância.

Para representar o modelo matemático, seja $u(x,v)$ um determinado potencial, associado à equação diferencial difusiva definida a seguir:

$$\frac{\partial u(x,v)}{\partial v} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 u(x,v)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad v > 0 \quad (1)$$

sujeita às seguintes condições de contorno:

$$u(0,v) = 0, \quad v > 0 \quad (2)$$

e

$$u(L,v) = 0, \quad v > 0 \quad (3)$$

atendendo à seguinte condição inicial:

$$u(x,0) = 100, \quad 0 \leq x \leq L \quad (4)$$

O problema acima definido é pedagogicamente e passo-a-passo tratado e resolvido analiticamente via o método de separação de variáveis, resultando como solução uma série analítica de expansão de autofunções, de construção algorítmica extremamente simples e sistemática [7].

Para fins de solução analítica e numa descrição resumida, o MSV baseia-se no princípio que a solução da equação governante pode ser expressa pelo produto de funções das variáveis independentes. Neste estágio, e adotando algumas manipulações analíticas, pode-se desacoplar o problema em dois novos, e estes são equações diferenciais ordinárias a uma única variável. Uma das equações, de primeira ordem, pode ser facilmente resolvida, sendo sua solução expressa por uma função analítica, exponencial decrescente. O outro problema é do tipo Sturm-Liouville, o qual também apresenta solução analítica facilmente determinável, que sem perda de generalidade, é expressa por uma série de autofunções. A solução geral do problema é obtida pelo princípio da superposição das soluções das duas equações diferenciais ordinárias em discussão, resultando numa série de expansão de autofunções, cujo controle de erro é prescrito. Em síntese, chega-se à seguinte solução:

$$u(x, v) = \sum_{n=1}^N C_n e^{-\alpha \lambda_n^2 v} \Psi_n(x, \lambda_n) \quad (5)$$

Assim, na série de expansão de autofunções acima, o potencial $u(x, v)$ é diretamente determinado em função dos termos: C_n , que é uma constante, e dos valores de $\Psi_n(x, \lambda_n)$, sendo Ψ_n , a n -ésima autofunção, e λ_n , o n -ésimo autovalor, gerados a partir de um problema de Sturm-Liouville. Numa análise numérica simples, segue que este problema possui convergência assegurada e controle prescrito de erro. Do ponto de vista algorítmico, é suficiente entrar com os valores prescritos de x e v e calcular diretamente o valor numérico de $u(x, v)$ em (5).

Para fins de solução da equação parabólica via diferenças finitas, numa abordagem simplificada, descrevem-se quantitativamente alguns dos principais passos matemáticos. Como é necessário se trabalhar derivadas de primeira e segunda ordens, utilizam-se expansão em série de Taylor, para expressar as primeira e segunda derivadas. Isto leva a se trabalhar com domínio discretizado, através de valores nodais. Truncam-se as mesmas para expressar as derivadas em função de valores nodais do potencial que se deseja calcular.

No método de Euler se assume que o valor de função num determinado tempo nodal posterior, $(v+1)$, é aproximadamente calculado a partir de uma extrapolação linear, partindo-se do tempo nodal atual (v). Em seguida, se correlacionam os valores das derivadas nodais da função em $(v+1)$ e (v) . Finalmente, se consegue construir um sistema explícito de equações, de ordem associada ao número de pontos nodais e do tipo:

$$\mathbf{u}_{N \times 1}^{(v+1)} = \mathbf{A}_{N \times N} \mathbf{u}_{N \times 1}^{(v)} \quad (6)$$

No sistema acima, $\mathbf{A}_{N \times N}$ é uma matriz com elementos constantes, calculados através de valores prescritos disponibilizados pelo programador. O sistema é inicializado partindo-se dos valores da condição inicial do problema. O critério de estabilidade e convergência é detalhado no texto do algoritmo implementado. O critério de parada é definido pelo programador.

Na solução do problema via o método de Crank-Nicolson, num certo ponto nodal, o valor aproximado da função no tempo atual, (v) , é expresso como a média aritmética das derivadas da função nos tempos nodais atual, (v) , e posterior, $(v+1)$. Sem perda de generalidade, para desenvolvimento da solução, segue-se uma metodologia pedagógica análoga à descrita para o método de Euler, obtendo-se:

$$\mathbf{A}_{N \times N} \mathbf{u}_{N \times 1}^{(v+1)} = \mathbf{B}_{N \times N} \mathbf{u}_{N \times 1}^{(v)} \quad (7)$$

Segundo a teoria de aprendizagem postulada por Ausubel, o problema matemático descrito a seguir é

disponibilizado num *notebook*, via a implementação no *software Mathematica* [10], onde foram utilizadas técnicas de programação simbólica, caracterizando-se assim o ambiente informatizado de aprendizagem. Nele, o aprendiz integradamente aborda: teorização, modelagem, solução matemática e interpretação de resultados, obtidos via recursos de visualização do comportamento das curvas de solução. Tabelas com dados numéricos permitem interpretar o comportamento das taxas de convergência da solução numérica. Complementarmente são criados botões e direcionadores que permitem ao aprendiz, caso este sinta necessidade, retornar a estágios anteriores do processo de construção do aprendizado.

Na sessão seguinte, comentam-se os procedimentos adotados para se discretizar o domínio do problema via geração de nós e estabelecer o comportamento da convergência das soluções, utilizando-se pedagogicamente, o uso tabelas. Estes resultados são em seguida criticamente comparados com os encontrados via a aplicação do método de separação de variáveis.

Também podem ser reestruturadas as entradas e saídas de dados, permitindo analisar o comportamento e convergência das soluções para diferentes combinações paramétricas.

Para aplicação, adotou-se o problema da condução de calor transiente e unidimensional, quando $u(x, v)$ agora passa a representar a distribuição de temperatura, $T(x, t)$, x a coordenada espacial e v , é substituída por t , a coordenada temporal. No ambiente informatizado de aprendizagem, o aprendiz pode acessar interativamente todo o encadeamento analítico dos passos matemáticos que levam às fórmulas finais. Finalmente o aprendiz procede à interpretação físico-matemática dos resultados, quando se adota a análise do comportamento da distribuição unidimensional de temperatura. Para fins ilustrativos, adota-se o epoxy, material amplamente utilizado na proteção térmica de dispositivos eletrônicos. A seguir apresentam-se os resultados obtidos.

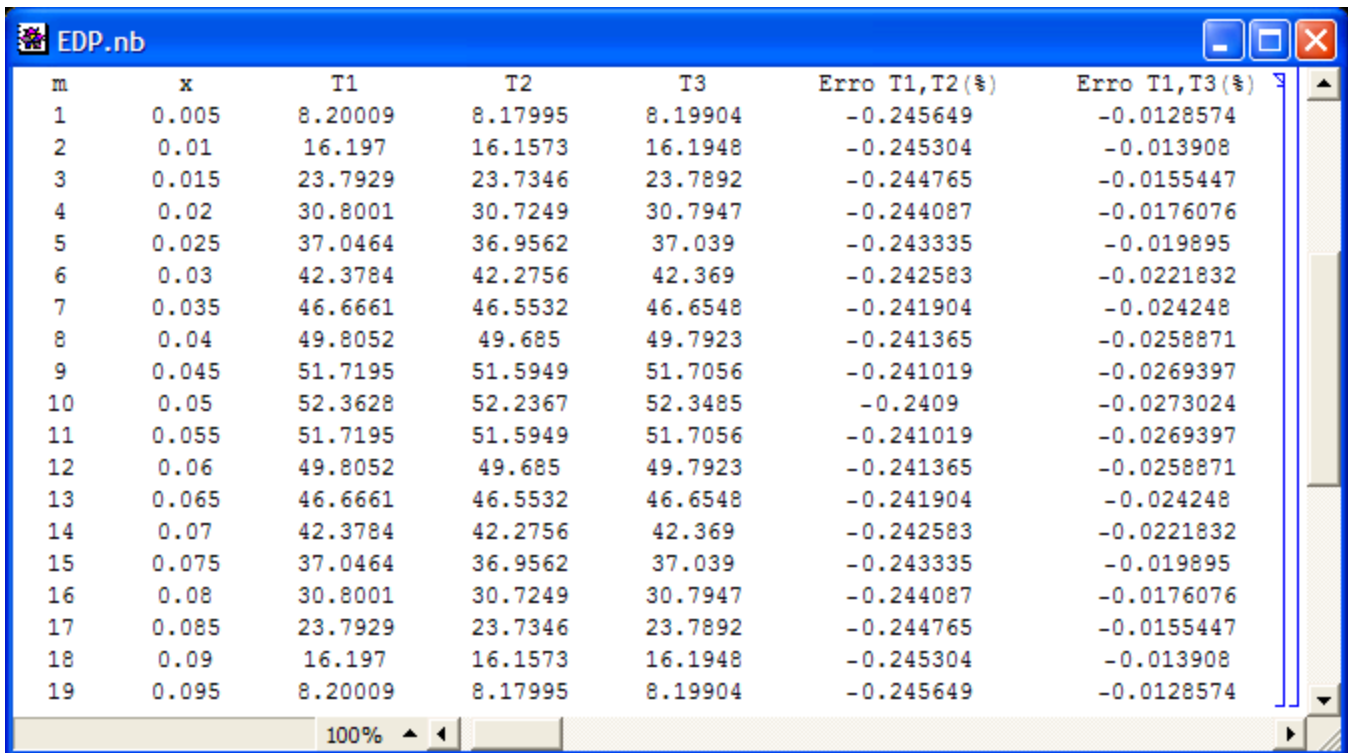
RESULTADOS

O ambiente informatizado de aprendizagem foi implementado no *software Mathematica* 3.01, utilizando-se um microcomputador Atholon XP, de 2.4 GHz e 1.0 GB de memória RAM. Assumiu-se a difusividade térmica do epoxy sendo $0,25 \times 10^{-6} m^2/s$ e comprimento característico $L = 0,1m$. Nos algoritmos de diferenças finitas, sugere-se ao aprendiz, numa fase preliminar de contato com o método de solução, trabalhar com os seguintes valores: para os incrementos temporal, $\Delta t = 20s$, tempo total de observação, $t_{total} = 3600s$ e número de nós do domínio, $M = 20$. Na solução analítica via o MSV, para obtenção de resultados numéricos, sugere-se trabalhar com 5 algarismos significativos convergidos. Neste método, é suficiente definir os valores de coordenadas espacial e temporal para obter os resultados numéricos da temperatura, conforme (5).

Interpretando Aspectos Numéricos

Para análise unificada de comparação do comportamento das taxas de convergência da solução nos três métodos, foram automaticamente geradas tabelas e disponibilizadas para o aprendiz, como mostra a Figura 1, apresentando valores das temperaturas e o erro relativo. Estes resultados estão contidos numa célula de saída do ambiente informatizado de aprendizagem. Observa-se a temperatura, em °C, sendo representado no MSV por T1, em Êuler por T2 e no Crank-Nicolson por T3. No primeiro caso, com 5 dígitos convergidos. Na primeira coluna, os nós, m , são representados por valores de 1 a 19. Na coluna 2, x expressa a coordenada espacial, medida em metros. As duas últimas

colunas contemplam o erro relativo percentual (ERP) para as soluções pelos métodos de Êuler e Crank-Nicolson, adotando-se o MSV como solução *benchmark*. Neste estágio, o aprendiz compara os dígitos significativos coincidentes nos valores numéricos das soluções obtidas e observa o ERP, adquirindo assim uma sensibilidade quantitativa. Para promover o aprendizado autônomo, o ambiente sugere ao aprendiz variar o número de nós no domínio e o valor da marcha de incremento temporal, para observar a estabilidade e taxa de convergência numéricas dos métodos numéricos adotados. Se induz ao aprendiz concluir via esta proposta de construção do processo de aprendizagem que o método de Êuler é mais instável em relação ao método de Crank-Nicolson.



m	x	T1	T2	T3	Erro T1, T2 (%)	Erro T1, T3 (%)
1	0.005	8.20009	8.17995	8.19904	-0.245649	-0.0128574
2	0.01	16.197	16.1573	16.1948	-0.245304	-0.013908
3	0.015	23.7929	23.7346	23.7892	-0.244765	-0.0155447
4	0.02	30.8001	30.7249	30.7947	-0.244087	-0.0176076
5	0.025	37.0464	36.9562	37.039	-0.243335	-0.019895
6	0.03	42.3784	42.2756	42.369	-0.242583	-0.0221832
7	0.035	46.6661	46.5532	46.6548	-0.241904	-0.024248
8	0.04	49.8052	49.685	49.7923	-0.241365	-0.0258871
9	0.045	51.7195	51.5949	51.7056	-0.241019	-0.0269397
10	0.05	52.3628	52.2367	52.3485	-0.2409	-0.0273024
11	0.055	51.7195	51.5949	51.7056	-0.241019	-0.0269397
12	0.06	49.8052	49.685	49.7923	-0.241365	-0.0258871
13	0.065	46.6661	46.5532	46.6548	-0.241904	-0.024248
14	0.07	42.3784	42.2756	42.369	-0.242583	-0.0221832
15	0.075	37.0464	36.9562	37.039	-0.243335	-0.019895
16	0.08	30.8001	30.7249	30.7947	-0.244087	-0.0176076
17	0.085	23.7929	23.7346	23.7892	-0.244765	-0.0155447
18	0.09	16.197	16.1573	16.1948	-0.245304	-0.013908
19	0.095	8.20009	8.17995	8.19904	-0.245649	-0.0128574

FIGURA 1

JANELA ILUSTRANDO A ANÁLISE DA CONVERGÊNCIA NUMÉRICA DAS TEMPERATURAS T1, T2 E T3, QUANDO $t = 3600$ s.

Interpretando Fisicamente a Variação de Temperatura

Para proceder à análise física do fenômeno de resfriamento do epoxy, o ambiente informatizado de aprendizagem disponibiliza animações e gráficos da evolução temporal do perfil de temperatura, mostrado-se ilustrativamente apenas um perfil na Figura 2. Nos contornos dos perfis, a temperatura é 0 °C, o que atende às condições de contorno representadas por (2) e (3). Sugere-se ao aluno, como aprendizagem complementar, adotar outras propriedades termofísicas, podendo assim

simular o resfriamento e comparar a dinâmica da evolução dos perfis de temperatura de diferentes materiais, o que permite se adquirir uma concepção mais clara do efeito da difusividade térmica.

Esta metodologia ressalta a valorização do aprendizado autônomo. Na prática, a informação expressa na forma estática não permitiria ao aprendiz ter contato com outras realidades físicas, agora construídas via a variação paramétrica nos dados de entrada do ambiente de aprendizagem.

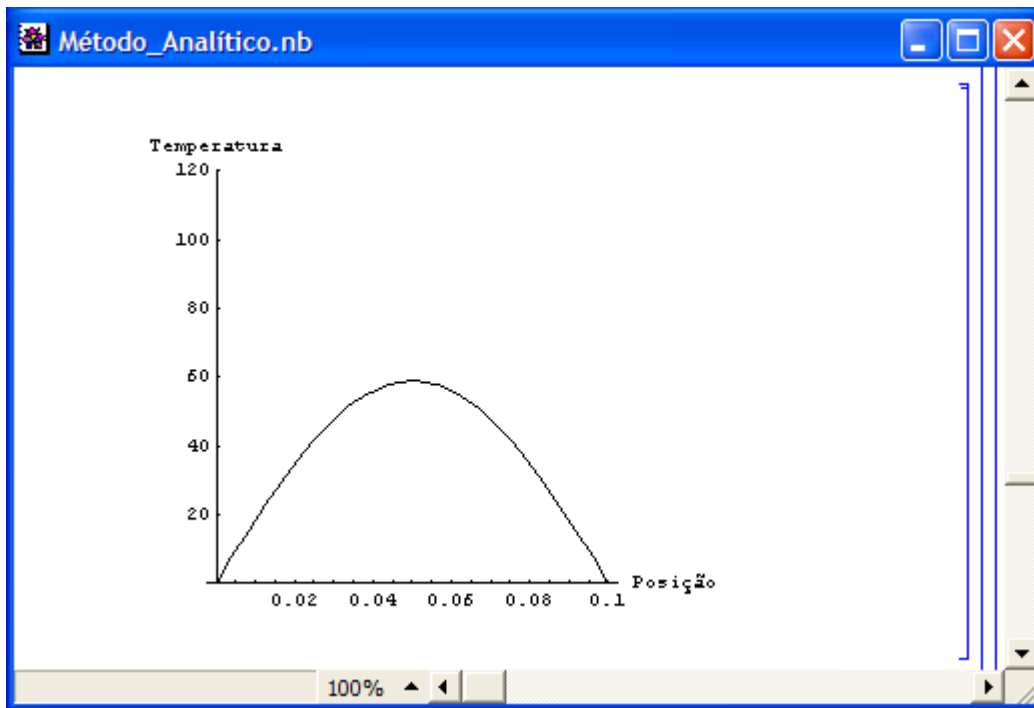


FIGURA 2

JANELA ILUSTRANDO UMA CÉLULA ABERTA PARA ANÁLISE DO PERFIL DE TEMPERATURA DURANTE O RESFRIAMENTO DO EPOXY.

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

O ambiente informatizado de aprendizagem permite ao aluno, segundo um procedimento sistemático, construir o aprendizado via a navegação nas células dos *notebooks*, abordando conceitos, formulação e solução matemáticas de equações diferenciais. A tabela disponibilizada permite o estudo do mecanismo de convergência numérica da temperatura, favorecendo a análise crítica da precisão dos resultados. Já o gráfico que exibe a distribuição do perfil de temperatura, possibilita a análise física do fenômeno do resfriamento. Caso seja interesse do professor, os algoritmos podem ser matematicamente refinados para resolver outras variantes do método de diferenças finitas, ou de outros métodos numéricos, expandindo assim a abrangência temática da disciplina cálculo numérico.

O professor pode propor ao aluno averiguar, com o auxílio da Internet, eventuais aplicações do cálculo da temperatura de resfriamento em casos práticos, citando-se aplicações em engenharias da computação, biomédica e eletrônica, indústrias química, automotiva, farmacêutica etc.

REFERÊNCIAS

[1] Ausubel, D. P., *Educational Psychology: a cognitive view*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1968.

- [2] Blum, M. A., "Construção de ambiente de aprendizagem para a disciplina refrigeração utilizando computação simbólica", Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual do Ceará / CEFET-CE, Fortaleza, 2003.
- [3] Mikhailov, M. D. e Özisik, M. N., *Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion*. New York: John Wiley & Sons, 1984.
- [4] Moreira, M. A., *Teorias de Aprendizagem*. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária, 1999.
- [5] Myers, G. E., *Analytical Methods in Conduction Heat Transfer*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1971.
- [6] Pinto, M. P., "Uma abordagem de aprendizado assistido por computador utilizando programação híbrida simbólico-numérica", Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2002.
- [7] Ribeiro, J. W., Duarte, J. B., e Andrade, F. E., "Computação híbrida aplicada à modelagem avançada e educação", *Anais da II Escola de Informática da SBC - Edição Nordeste*, pp. 72–90, 1999.
- [8] Sit, W. Y., "Mathematica notebooks for a conventional differential equations course", *Journal of Symbolic Computation*, vol. 23, n. 5/6, pp. 589–623, Maio/Junho 1997.
- [9] Valente, J. A., *Computadores e Conhecimento: repensando a educação*. Campinas: UNICAMP, 2 ed., 1993.
- [10] Wolfram, S., *The Mathematica Book*. Cambridge: Cambridge University Press, 3 ed., 1996.