Una propuesta para la utilización de los esquemas previos operativos de los alumnos en la enseñanza del álgebra del 7º. Curso a partir de un estudio de caso[*]

C. Haetinger[**] **y M.T. Kettermann**

Abstract

Starting from questions ([3]) concerning the operative previous schemes of students of the 7th. class on topics of the Algebra's contents in the Escola Estadual de Ensino Fundamental Vidal de Negreiros (Brazil), we present a work proposal for the teaching of the Algebra considering these reasoning.

Introducción

El Álgebra "*...es una fuente de confusión y actitudes negativas considerables entre los alumnos*". Ese comentario hace parte de un estudio, hecho en Inglaterra, de los recuerdos de adultos cuando aprendiendo la Matemática en la escuela (Universidad de Bath, 1982). Nosotros nos preguntamos por qué entonces es difícil aprender el Álgebra?

La noción de Álgebra parece iniciarse en el 6º. Curso de primaria, cuando empezamos el estudio de las ecuaciones lineales en una variable. Sin embargo, el contenido tiende a dejar el estudiante arrestado al estudio del término desconocido a que debe atribuir o para encontrar un valor. Esto genera dificultad de separar las nociones de término desconocido y de variable.

Parécenos que para los estudiantes el estudio del Álgebra no les presenta mucho significado, pues ellos no hacen la relación de la misma con sus cotidianos.

Otra dificultad está en la conversión de los algoritmos, puesto que muchas veces los estudiantes no aplican el conocimiento adquirido en la Aritmética porque ellos juzgan que los mismos no son para el Álgebra abstracta.

Este trabajo propone investigar el desarrollo algebraico de un conjunto de estudiantes, verificando y analizando su aprendizaje durante el año lectivo de 2001. La población atingida son 49 estudiantes del 7º. Curso de primaria en la Escola Estadual de Ensino Fundamental Vidal de Negreiros[1], en la ciudad de Estrela-RS (Brasil).

Nosotros verificamos algunas de las dificultades encontrados por este grupo de estudiantes con respecto:

- al desarrollo de algunos esquemas previos operativos en el pasaje de la Aritmética para el Álgebra abstracta;
- las diferentes concepciones del Álgebra y los usos respectivos de las variables.

Aplicamos dos instrumentos, en la forma de preguntas: uno con el objetivo de categorizar los errores más frecuentes de los alumnos para determinar algunos esquemas

---

[*] Este trabajo es basado en la monografía desarrollada en 2000-2001 por la segunda autora, como uno de las fases de la Especialización en la Enseñanza de Ciencias y Matemática en UNIVATES.

[**] Parcialmente apoyado por la Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul (FAPERGS, Brasil).

[1] Escuela pública de enseñanza primaria.

previos operativos no suficientemente formados con respecto al concepto de variable, y otro para verificar la evolución de estos conceptos.

Categorización de los errores más frecuentes

Una de las maneras de descubrir por qué se vuelve el Álgebra difícil, es identificar los tipos de errores que los estudiantes normalmente cometen, y entonces investigar las razones de esos errores.

En esto sentido, se utilizó inicialmente un cuestionario de 22 preguntas, basado en J. Marquis ([3], pg. 235) para clasificar los principales tipos de errores de los estudiantes.

Los estudiantes debían completar al segundo miembro de las expresiones de la manera que juzgasen ser correcto. En el siguiente cuadro se presenta las preguntas y las respuestas con mayor frecuencia de errores.

Cuadro 1. Respuestas con mayor frecuencia de errores según el cuestionario

Preguntas	**Respuestas con mayor frecuencia de errores**
1) $\|-3\| =$	-3
2) $3^2 \,.\, 3^3 =$	3^6 o 9^5
3) $a^2.b^5 =$	$a.b^7$
4) $x+y-3(z+w) =$	$x+y-3z+3w$
5) $\frac{r}{4}-\frac{(6-s)}{2} =$	$\frac{r-12-2s}{2}$
6) $3a+4b =$	$7ab$
7) $3.x^{-1} =$	$\frac{1}{3x}$
8) $\sqrt{x^2+y^2} =$	$x+y$
9) $\frac{x+y}{x+z} =$	$\frac{y}{z}$
10) $\frac{1}{x-y} =$	No sabían como hacerlo
11) $\frac{x}{y}+\frac{r}{s} =$	No sabían como hacerlo
12) $x\left(\frac{a}{b}\right) =$	$\frac{xa}{xb}$
13) $\frac{xa+xb}{x+xd} =$	$\frac{a+b}{d}$
14) $\sqrt{-x}.\sqrt{-y}$	No sabían como hacerlo
15) Si $2.(2-z) < 12$, entonces z...	No sabían como hacerlo
16) $\frac{1}{1-\frac{x}{y}} =$	No sabían como hacerlo

17) $a^2.a^5 =$	a^{10}
18) $(3a)^4 =$	No habían recordado de usar las potencias, pues habrían letras
19) $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=$	No habían recordado de evaluar el mínimo múltiplo común de los denominadores
20) $(x+4)^2 =$	x^2+16
21) $\frac{r}{4}-\frac{6-s}{4}=$	No consideraran las fracciones
22) $(a^2)^5$	No habían recordado de usar las potencias, pues habrían letras

Z. Usiskin ([3], pg. 9-22) clasifica el Álgebra en cuatro concepciones:

1. Concepción del Álgebra como Aritmética generalizada;
2. Concepción del Álgebra como un estudio de los procedimientos para resolver ciertos tipos de problemas;
3. Concepción del Álgebra como estudio de relaciones entre grandezas;
4. Concepción del Álgebra como estudio de las estructuras.

A partir dos datos de lo cuestionario, se percibió claramente la dificultad de los alumnos para superar la barrera entre la Aritmética y el Álgebra, en particular cuando envolvían una traducción del lenguaje escrita usual para el lenguaje matemática.

Muchos errores siguen a un modelo consistente; ellos no parecen ser casuales. La fuente de los errores está en concepciones diferentes concernientes a la estructura y a las expresiones algebraicas y en los procesos para el que es hecha la traducción del lenguaje usual para el lenguaje algebraico.

En la Aritmética, el enfoque es encontrar las respuestas numéricas particulares y en el Álgebra el enfoque es establecer procedimientos y relaciones y expresarlos en una forma simplificada al general. Muchos estudiantes, cuando se inician en el Álgebra, no notan esto y ellos continúan con el pensamiento de que deben dar las respuestas numéricas. Según K.F. Collis ([2]),"*...los estudiantes tienen la dificultad cognoscitiva en aceptar la ausencia del cierre*....".

Una parte de la dificultad de los estudiantes para simplificar las expresiones, como en la pregunta 6, tiene relación con sus interpretaciones del símbolo operativo (Booth [3], pg. 30). Si ellos no son tratados apropiadamente, estos errores de concepción en la Aritmética pueden llevar, después, a problemas en el Álgebra. Para entender la generalización de las relaciones y procedimientos de la Aritmética se necesita primero que tales relaciones y procedimientos se aprendan dentro del contexto aritmético. En este sentido, las dificultades del estudiante en el Álgebra no son tanto de Álgebra, sino de problemas en Aritmética que no se corrigieron. Quizás el aspecto más importante es la concepción de variable.

Las concepciones sobre el álgebra y el uso de las variables

Las diferentes concepciones del Álgebra están relacionadas con los diferentes usos de las variables. Sigue un resumen sumamente simplificado de esas relaciones, según Z. Usiskin ([4]):

Cuadro 2. Uso de las variables en las distintas concepciones del álgebra

Concepción del Álgebra	**Uso de las Variables**
Aritmética generalizada	Generalizadoras de modelos (traducir, generalizar)
Modo de resolver ciertos problemas	Incógnitas, constantes (resolver, simplificar)
Estudio de relaciones	Argumentos, parámetros (relacionar, gráficos)
Estructura	Signos arbitrarios en el papel (manipular, justificar)

Consideremos las siguientes ecuaciones ([3], pg. 10), todas con la misma forma – el producto de dos números es igual a un tercero:

1. *A=b.h*
2. *40=50x*
3. *sin(x)=cos(x).tan(x)*
4. *1=n.(1/n)*
5. *y=kx*

Cada uno de ellos tiene un carácter diferente. Normalmente nosotros llamamos (1) de fórmula, (2) de ecuación (o la sentencia abierta), (3) de identidad, (4) de propiedad y (5) de ecuación de una función que traduce una proporcionalidad directa. Esos varios nombres reflejan los usos diferentes dados a la idea de variable. En (1), *A,b* y *h* representan respectivamente el área, la base y la altura, y ellos tienen carácter de cosa conocida. En (2) nosotros tendimos a pensar en *x* como uno incógnito. En (3), *x* es el argumento de una función. La ecuación (4), al contrario de las otras, generaliza un modelo aritmético y *n* identifica un ejemplo del modelo. En (5), *x* es una vez más el argumento de una función, y el valor *k* es una constante (o parámetro, dependiendo de como él se usa). Sólo en (5) hay la característica de la “variabilidad". Aun así, tal característica no estará presente si nosotros imaginamos esa ecuación como la representación analítica de una línea recta con inclinación *k*, pasando por el origen ([3], pg.10).

Modificando concepciones

Los contenidos desarrollados durante el año lectivo del 2001 fueran:

- Productos notables;
- Polinomios;
- Ecuaciones lineales en una variable;
- Sistemas de ecuaciones lineales en dos variables.

Procuramos hacer con que los alumnos cambiasen sus concepciones acerca del Álgebra, especialmente con relación al uso de las variables. Usamos varias actividades tales como ejercicios, problemas, entrevistas, preguntas, trabajos en equipo, etc.

Nuestro instrumento de control es un cuestionario basado en J. Lochhead y J.P. Mestre ([3], pg. 146-147).

Cuadro 3. Cuestionario sobre las concepciones con respecto a los variables

1. Resuelva para x: $\frac{6}{4}=\frac{30}{x}$
2. Jones a veces visita a su amigo Lubboft en el automóvil, rodando 60 millas y gastando 3 galones de gasolina. Cuando visita a su amigo Schwartz, él rueda 90 millas y gasta □ galones de gasolina. (Asuma las mismas condiciones de consumo en los dos casos).
3. Escriba una ecuación que usa las variables A y P para representar la declaración siguiente: "Hay seis veces más estudiantes que maestros en esta universidad". Use A para indicar el número de estudiantes y P para indicar el número de maestros.
4. Escriba una ecuación que usa las variables Q y T para representar la declaración siguiente: "En la tienda dulce de Mindy, para cada cuatro personas que piden el pastel de queso, cinco piden el pastel de la manzana". Use Q para indicar el número de pasteles de queso y T para representar el número de pasteles de la manzana.
5. Se cuelgan los pesos en la extremidad de un rollo espiral y mídanse las dimensiones correspondientes. La tabla abajo despliegue los datos: Distensión D (cm) — Peso P (g) 3 — 100 6 — 200 9 — 300 12 — 400 Escriba una ecuación que permite predecir el distensión (D), dado el peso (P).
6. Escriba una expresión en idioma portugués que da la misma información que la ecuación siguiente: “M=7S”, dónde M es el número de ensambladores de una fábrica y S él es el número de soldadores de la misma fábrica.
7. De un avión, un hombre saca una foto de algunas vacas y cerdos que están en un campo lleno de vacas y cerdos. Él está seguro que fotografió una muestra típica de los animales de ese campo. Escriba una ecuación con las letras V y P para describir la relación entre el número V de vacas y el número P de cerdos del campo. Esa ecuación permitirá él calcular el número de vacas, dado el número de cerdos.

Primeramente se pidió a los estudiantes que contestasen las preguntas usando los algoritmos. Después de que nosotros verificamos las respuestas, nosotros trabajamos cada uno de los problemas vocalmente.

Verificamos que los estudiantes eran capaces de lograr las manipulaciones algebraicas (pregunta 1) y de leer y resolver correctamente (pregunta 2). Sin embargo, muchos no eran capaces traducir correctamente en el idioma matemático (pregunta 3 y 4).

Las dificultades principales se presentan en asuntos dónde se pide escribir una expresión literal que representa una relación entre dos variables a partir de una tabla (pregunta 5 y 7), o una frase a partir de una ecuación lineal a dos variables (pregunta 6).

Las causas de estos errores fueron discutidas completamente por varios investigadores y ellos se encuentran fácilmente en la literatura científica.

A través de la corrección oral de las respuestas presentadas por los estudiantes, pudimos notar en ellos que tienen una tendencia fuerte tanto a asociar el orden de las palabras (de la izquierda para el derecho) como al traducir preguntas como las de número 3 y 4. Con eso, ellos expresan "seis veces más estudiantes que maestros" como" 6A=P" en lugar de "A=6P". También son llevados a esta interpretación equivocada porque consideran los símbolos "A" y "P" como representando "estudiantes" y "maestros" en lugar de "la cantidad de estudiantes" y "el número de maestros".

También verificamos que las concepciones realmente no habían cambiado, y que algunos esquemas previos operativos todavía no habían sido desarrollados suficientemente.

Propuestas para la enseñanza del álgebra

Considerado el análisis anterior, nuestra propuesta es que el año escolar empieza con una intensa práctica de problemas que involucran el proceso de traducción en el contexto previo. Con esto, nosotros esperamos disminuir la confusión entre los diferentes sistemas de la representación usados en el Álgebra.

J. Locchead y J. P. Mestre ([3], pg. 151-152), sugieren una manera de reducir los conflictos provocados por la inconsistencia interior de las concepciones malas de los estudiantes. El proceso, aplicado a la pregunta 3, consiste en tres fases:

1. **Comprensión cualitativa**: se le pregunta a los alumnos se hay más estudiantes o más maestros;
2. **Comprensión cuantitativa**: se le pregunta algo como: "Supone que había 100 maestros en una universidad. ¿Cuántos estudiantes los tendrían?"
3. **Comprensión conceptual:** se pide a los estudiantes que escriban una ecuación que representa la declaración del problema.

En la práctica, con este abordaje dialogado, el maestro raramente le dirá la respuesta correcta al estudiante. Simplemente formulará los asuntos exploratorios con el objetivo de eliminar eventuales contradicciones resultantes de las concepciones de los estudiantes. El estudiante se induce para modificar sus concepciones a través de estos asuntos. El objetivo más grande no es quizás (en este momento) hacer que los estudiantes escriban la ecuación apropiada, síno, que ellos enfrenten sus concepciones y las cambien, de la que vuelvan a las concepciones viejas en el futuro.

Un levantamiento continuo de lo que involucra exactamente el aprendizaje de nuevos temas de Álgebra, acompañado por un análisis de los errores hecho por los estudiantes y de sus causas, entre ellos los esquemas previos operativos, puede proporcionarnos instrumentos sumamente útiles para decidir como mejorar el aprendizaje del niño del Álgebra. Además, nosotros proponemos una atención más grande con relación a:

- El reordenamiento de prioridades entre los resultados de la enseñanza;
- El incremento de nuevos contenidos como el Matemática Discreto;
- El entendimiento de conceptos como el uno de variable y el uno de función;
- La representación de fenómenos en la forma algebraica y en la forma gráfica;
- La habilidad en la presentación e interpretación de datos, evaluación y acercamiento, predicción y en la formulación y resolución de problemas;
- La manipulación e interpretación de hojas de cálculo electrónicas.

Los comentarios finales

Los maestros buscan las respuestas a los asuntos en la efectividad de la enseñanza e informaciones acerca de los nuevos métodos y los materiales didácticos. El responsable para la elaboración de los currículos, necesita entender los problemas y las necesidades contemporáneas.

La tarea de modificar el plan de estudios de Álgebra se quedará sin un esfuerzo enorme, y las respuestas definitivas a los problemas educativos quizás se quedan para siempre muy lejos de nuestro alcance.

Referencias

[1] – BOOTH, L.R. (1984) Algebra. *Children Strategies and Errors*. Windsor, Inglaterra. NFER-Nelson.
[2] – COLLIS, K.F. (1975). *A Study of Concrete and Formal Operations in School Mathematics: a Piagetian Viewpoint*. Melbourne: Australian Council for Educational Research.
[3] – COXFORD, A.F.; SHULTE, A.P. (1994). *As idéias da Álgebra.* São Paulo, editora Atual.
[4] – USISKIN, Z. (1976). *Algebra Through Applications.* Chicago: Departament of Education, University of Chicago.

Departamento de Ciências Exatas e Biológicas
Centro Universitário UNIVATES
95900-000, Lajeado-RS, Brasil
e-mail: chaet@fates.tche.br

Escola Estadual de Ensino Fundamental Vidal de Negreiros
95880-000, Estrela-RS, Brasil
e-mail: heinzegon@uol.com.br