

# TEOREMAS DE ESTRUTURA PARA ÁLGEBRAS SEMISIMPLES

Miguel Ferrero\*

Instituto de Matemática

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

91509-900, Porto Alegre, Brazil

e-mail: ferrero@mat.ufrgs.br

**Abstract**

## Introdução

### 1 Pré-Requisitos

Nestas notas, anéis serão sempre anéis associativos com unidade, não necessariamente comutativos. Ideais de um anel podem ser ideais à direita, esquerda ou bilaterais. Quando  $I$  é um ideal bilateral do anel  $R$  diremos simplesmente que  $I$  é um ideal de  $R$  e denotaremos por  $I \triangleleft R$ . Se  $I$  é um ideal de  $R$ , então a estrutura quociente  $R/I$  está definida e existe um epimorfismo canônico  $\pi : R \rightarrow R/I$  tal que  $\pi(r) = r + I$ , para todo  $r \in R$ . A classe de  $r$  em  $R/I$  será denotada por  $\bar{r}$  se não houver possibilidade de confusão.

Um anel  $R$  é dito um anel simples se os únicos ideais de  $R$  são  $0$  e  $R$ . Isto significa que para cada  $0 \neq a \in R$  existem  $b_i, c_i \in R$ ,  $i = 1, \dots, n$  tais que  $\sum_i b_i a c_i = 1$ .

Se  $R$  é um anel comutativo, então  $R$  é simples se, e somente se,  $R$  é um corpo. Mas, no caso de anéis não comutativos, a situação é bem mais complicada. Alguns resultados e exemplos posteriores tornarão esta afirmação mais clara.

Um elemento  $a \in R$  é dito um divisor de zero à esquerda se existir um elemento  $0 \neq b \in R$  tal que  $ab = 0$ . Analogamente, define-se um divisor de zero à direita. Utilizando anéis de matrizes é fácil dar exemplos de elementos que são divisores de zero à direita e não à esquerda.

Um domínio de integridade é um anel que não tem divisores de zero à direita (conseqüentemente, tampouco possui divisores de zero à esquerda).

---

\*Partially supported by Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq, Brazil).

Um elemento  $a$  de um anel  $R$  é dito um elemento nilpotente se existir um inteiro positivo  $n$  tal que  $a^n = 0$ . Um anel que não possui elementos nilpotentes não nulos é dito um anel reduzido. Equivalentemente,  $R$  é um anel reduzido se para  $a \in R$  a relação  $a^2 = 0$  implica  $a = 0$ .

Um elemento  $a \in R$ ,  $R$  um anel, é dito inversível à direita (resp. à esquerda) se existir  $b \in R$  tal que  $ab = 1$  (resp.  $ba = 1$ ). Um elemento inversível à esquerda e direita chama-se uma unidade (ou elemento inversível) de  $R$ . O conjunto  $U(R)$  de todas as unidades do anel  $R$  é um grupo multiplicativo.

Um anel de divisão é um anel no qual todos os elementos não nulos são inversíveis. Os anéis de divisão comutativos são os corpos. Os exemplos mais simples de anéis de divisão não comutativos são os quatérnios sobre o corpo dos números reais ou racionais ([1], (1.1)).

Suporemos conhecidos as definições e conceitos básicos da Teoria de Módulos. O leitor que o deseje pode consultar [2] e [?].

## 2 Condições de Cadeia

Nesta secção lembramos alguns resultados sobre condições de cadeia, que suporemos conhecidos. Detalhes sobre o assunto podem ser encontrados em [2].

Dado um conjunto  $X$ , dizemos que uma família de subconjuntos  $\mathcal{F} = (X_i)_{i \in I}$  de  $X$  satisfaz a condição da cadeia ascendente (brevemente ACC, do inglês “ascending chain condition”) se  $\mathcal{F}$  não contém uma subfamília estritamente crescente  $X_{i_1} \subset X_{i_2} \subset X_{i_3} \subset \dots$ .

Duas formulações equivalentes são as seguintes:

(i) Para qualquer cadeia  $X_{i_1} \subseteq X_{i_2} \subseteq X_{i_3} \subseteq \dots$ , de elementos de  $\mathcal{F}$ , existe  $n$  tal que  $X_{i_n} = X_{i_{n+1}} = \dots$ .

(ii) Qualquer subfamília não vazia de  $\mathcal{F}$  possui um elemento maximal.

A condição da cadeia descendente (brevemente DCC, de “descending chain condition”) pode ser formulada em forma dual.

Seja  $R$  um anel e  $M$  um módulo à esquerda sobre  $R$ .

**Definição 2.1** Dizemos que  $M$  é noetheriano (resp. artiniano) se a família de submódulos próprios de  $M$  satisfaz ACC (resp. DCC).

Os seguintes resultados são bem conhecidos.

**Proposição 2.2**  $M$  é noetheriano se, e somente se, cada submódulo de  $M$  é finitamente gerado.

**Proposição 2.3** Seja  $N$  um submódulo de  $M$ . Então  $M$  é noetheriano (resp. artiniano) se, e somente se,  $N$  e  $M/N$  são noetherianos (resp. artinianos). Em particular, a soma direta de um número finito de módulos noetherianos (resp. artinianos) é noetheriano (resp. artiniano).

Um módulo  $M$  é dito simples (ou irredutível) se  $M \neq 0$  e os únicos submódulos de  $M$  são os triviais (isto é, são  $0$  e  $M$ ).

Uma série composição de  $M$  é uma família de submódulos  $0 = N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \dots \subset N_n = M$ , onde entre  $N_i$  e  $N_{i+1}$  não existem submódulos diferentes deles (equivalentemente, o quociente  $N_{i+1}/N_i$  é simples).

O resultado seguinte é muito importante ([2]).

**Proposição 2.4** *Um módulo é noetheriano e artiniano se, e somente se, possui uma série composição.*

Uma série  $\mathcal{S}_1$  é dita um refinamento de outra série  $\mathcal{S}_2$  se  $\mathcal{S}_1$  possuir todos os termos de  $\mathcal{S}_2$ . Se  $M$  possui uma série composição, então toda outra série pode ser refinada até obter-se uma série composição. Mais precisamente,

**Proposição 2.5** (Schreier) *Dadas duas séries de  $M$ , ambas as séries podem ser refinadas de modo tal que os refinamentos tenham o mesmo comprimento e todos os fatores de um sejam isomorfos aos fatores do outro (não necessariamente na mesma ordem).*

Em particular, temos o famoso Teorema de Jordan-Hölder:

**Teorema 2.6** *Sejam  $0 = N_1 \subset N_2 \subset \dots \subset N_m = M$  e*

$$0 = N'_1 \subset N'_2 \subset \dots \subset N'_s = M$$

*duas séries composição. Então  $m = s$  e existe uma permutação  $\pi$  do conjunto  $\{0, 1, \dots, m-1\}$  tal que  $N_{i+1}/N_i \simeq N'_{\pi(i)+1}/N'_{\pi(i)}$ .*

Um anel  $R$  é dito noetheriano (resp. artiniano) à esquerda se  $R$ , considerado como  $R$ -módulo à esquerda, é noetheriano (resp. artiniano). Definição análoga é dada à direita.  $R$  é dito noetheriano (resp. artiniano) se  $R$  é noetheriano (resp. artiniano) à esquerda e à direita.

Um anel noetheriano (artiniano) à esquerda não necessariamente é noetheriano (artiniano) à direita ([1], pag 22). Ou seja, existem anéis noetherianos (artinianos) à esquerda que não são noetherianos (artinianos).

Temos também a seguinte

**Proposição 2.7** *Seja  $M$  um  $R$ -módulo à esquerda finitamente gerado, onde  $R$  é noetheriano (resp. artiniano) à esquerda. Então  $M$  é noetheriano (resp. artiniano).*

Para terminar esta seção queremos mencionar um interessante resultado devido a C. Hopkins e J. Levitzky, que pode ser encontrado em [1] (Teorema 4.15). Notemos que este resultado vale somente para anéis com unidade e não vale para módulos.

**Teorema 2.8** *Se  $R$  é um anel artiniano à esquerda (resp. direita), então  $R$  é noetheriano à esquerda (resp. direita).*

### 3 Módulos e Anéis Semisimples

Seja  $R$  um anel e seja  $M$  um módulo à esquerda sobre  $R$ .

**Definição 3.1**  $M$  é dito semisimples se todo submódulo de  $M$  é um somando direto.

Note que, de acordo com a definição, todo módulo simples é semisimples. Além disso, o módulo zero é semisimples mas não é simples.

**Lema 3.2** *Todo submódulo de um módulo semisimples é semisimples.*

Prova. Se  $M$  é semisimples e  $K < N < M$ , então existe um submódulo  $P$  de  $M$  tal que  $K \oplus P = M$ . É fácil verificar que  $K \oplus (N \cap P) = N$ , o que completa a prova. ■

**Lema 3.3** *Todo módulo semisimples não nulo contém um submódulo simples.*

Prova. Seja  $M$  um módulo à esquerda semisimples e seja  $0 \neq m \in M$ . Então  $Rm$  é semisimples, pelo Lema 3.2, e é suficiente provar que  $Rm$  contém um módulo simples.

Pelo Lema de Zorn, existe um submódulo  $N$  de  $Rm$  que é maximal com respeito à propriedade  $m \notin N$ . Seja  $P$  um submódulo de  $Rm$  tal que  $N \oplus P = Rm$ . Então  $P$  é simples. De fato, se existir  $0 \neq K < P$  temos  $N \oplus K \supset N$ . Portanto,  $m \in N \oplus K$  e segue que  $N \oplus K = Rm$ . Agora é fácil verificar que  $K = P$ . ■

Estamos agora em condições de obter duas outras caracterizações de módulos semisimples.

**Teorema 3.4** *Seja  $M$  um  $R$ -módulo à esquerda. As seguintes condições são equivalentes:*

- (i)  $M$  é semisimples.
- (ii)  $M$  é uma soma direta de módulos simples.
- (iii)  $M$  é uma soma de módulos simples.

Prova. (i)  $\rightarrow$  (ii): Seja  $M_1$  a soma de todos os submódulos simples de  $M$ . Sendo que  $M$  é semisimples, existe um submódulo  $M_2$  de  $M$  tal que  $M_1 \oplus M_2 = M$ . Pelo Lema 3.3,  $M_2$  é semisimples e, portanto, se é não nulo contém um submódulo simples  $N$ . Isto é impossível, sendo que  $N$  deveria estar contido em  $M_1$  e  $M_1 \cap M_2 = 0$ .

(iii)  $\rightarrow$  (i): Suponhamos que  $M$  é a soma dos submódulos simples  $(M_i)_{i \in \Omega}$  e que  $N$  é um submódulo de  $M$ . Consideremos a família de todos os subconjuntos  $\Lambda$  de  $\Omega$  tais que

- (a)  $\sum_{j \in \Lambda} M_j$  é uma soma direta.
- (b)  $N \cap \sum_{j \in \Lambda} M_j = 0$ .

É fácil verificar que o Lema de Zorn se aplica para a família de todos os subconjuntos  $\Lambda$ . Portanto, existe um subconjunto  $\Gamma$  maximal que satisfaz as propriedades (a) e (b) para  $\Lambda = \Gamma$ .

Seja  $P = N + \sum_{j \in \Gamma} \oplus M_j = N \oplus \sum_{j \in \Gamma} \oplus M_j$  e suponhamos que  $P \neq M$ . Então existe um  $k \in \Omega$  tal que  $M_k \not\subseteq P$ . Como  $M_k$  é simples temos que  $M_k \cap P = 0$ . Portanto a soma  $P + M_k$  é direta e segue que

$$N \oplus \sum_{j \in \Gamma} \oplus M_j + M_k = N \oplus \sum_{j \in \Gamma} \oplus M_j \oplus M_k,$$

o que contradiz a escolha de  $\Gamma$ . Isto mostra que  $M = N \oplus \sum_{j \in \Gamma} \oplus M_j$ , ou seja,  $N$  é um somando direto de  $M$ .

A prova de (iii)  $\rightarrow$  (ii) é mesma da de (iii)  $\rightarrow$  (i) com  $N = 0$  e (ii)  $\rightarrow$  (iii) é óbvio. ■

Vamos agora definir os objetos mais importantes nestas notas, os anéis semi-simples.

**Definição 3.5** *Um anel  $R$  é dito semisimples à esquerda se o  $R$ -módulo à esquerda  $R$  é semisimples.*

Utilizando módulos à direita em lugar de módulos à esquerda, podemos definir de maneira semelhante anéis semisimples à direita. Veremos depois que um anel é semisimples à esquerda se e somente se é semisimples à direita. Portanto poderemos omitir os adjetivos “direita” e “esquerda” quando falarmos de anéis semisimples.

O seguinte teorema estabelece várias formas equivalentes para a Definição 3.5.

**Teorema 3.6** *Para um anel  $R$ , as seguintes condições são equivalentes:*

- (i)  *$R$  é semisimples à esquerda.*
- (ii) *Toda seqüência exata curta de  $R$ -módulos à esquerda cinde.*
- (iii) *Todo  $R$ -módulo à esquerda é semisimples.*
- (iv) *Todo  $R$ -módulo à esquerda finitamente gerado é semisimples.*
- (v) *Todo  $R$ -módulo à esquerda cíclico é semisimples.*

Prova. As implicações (iii)  $\rightarrow$  (iv)  $\rightarrow$  (v)  $\rightarrow$  (i) são claras.

Dizer que um submódulo  $N$  de um módulo  $M$  é um somando direto é equivalente a dizer que a seqüência exata curta  $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow M/N \rightarrow 0$  cinde. Logo (ii) e (iii) são equivalentes.

Portanto, para completar a prova é suficiente provarmos que (i)  $\rightarrow$  (iii). Seja, então,  $R$  semisimples à esquerda e  $M$  um  $R$ -módulo à esquerda qualquer. Para  $m \in M$ ,  $Rm$  é um submódulo de  $M$ . Consideremos o homomorfismo  $f : R \rightarrow Rm$  definido por  $f(r) = rm$ , para todo  $r \in R$ . O núcleo  $\ker(f)$  de  $f$  é um submódulo do  $R$ -módulo à esquerda  $R$ . Por tanto,  $R \simeq \ker(f) \oplus Rm$ , e então  $Rm$  pode ser considerado um submódulo de  $R$ . Isto implica que  $Rm$  é semisimples e,

conseqüentemente, é uma soma de módulos simples. Portanto  $M = \sum_{x \in M} Rx$  é também uma soma de módulos simples, o que completa a prova. ■

Uma das caracterizações do teorema anterior permite obter um corolário muito interessante.

**Corolário 3.7** *Um anel semisimples à esquerda é noetheriano e artiniano à esquerda.*

Prova. Por hipótese,  $R$  é uma soma direta de ideais à esquerda  $(I_i)_{i \in \Omega}$  que são simples como  $R$ -módulos. Sendo que  $1 \in R$ , podemos escrever  $1 = \sum_{i=1}^n u_i$ , onde  $u_i \in I_i$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ . Então  $R = \sum_{i=1}^n \oplus I_i$ , e como cada  $I_i$  é simples, segue que  $0 < I_1 < I_1 \oplus I_2 < \dots < I_1 \oplus \dots \oplus I_n = R$  é uma série composição do  $R$ -módulo  $R$ . Portanto  $R$  é noetheriano e artiniano à esquerda, pela Proposição 2.4.

Existem caracterizações homológicas da classe de anéis semisimples, que apresentaremos rapidamente aqui. O leitor que deseje mais detalhes sobre o assunto pode ver ([1], pag. 29-30).

Um módulo  $P$  é dito projetivo se para todo epimorfismo  $f : N \rightarrow M$  e todo homomorfismo  $g : P \rightarrow M$  existe um homomorfismo  $h : P \rightarrow N$  tal que  $f \circ h = g$ . Dizer que um módulo é projetivo equivale a dizer que ele é um somando direto de um módulo livre. Temos o seguinte:

**Teorema 3.8** *Para um anel  $R$ , as seguintes condições são equivalentes:*

- (i)  $R$  é semisimples à esquerda.
- (ii) Todo  $R$ -módulo à esquerda é projetivo.
- (iii) Todo  $R$ -módulo à esquerda finitamente gerado é projetivo.
- (iv) Todo  $R$ -módulo à esquerda cíclico é projetivo.

A noção dual de módulo projetivo é a de módulo injetivo. Um módulo  $I$  é injetivo se para todo monomorfismo  $f : K \rightarrow M$  e todo homomorfismo  $g : K \rightarrow I$  existe um homomorfismo  $h : M \rightarrow I$  tal que  $h \circ f = g$ .

**Teorema 3.9** *Para um anel  $R$ , as seguintes condições são equivalentes:*

- (i)  $R$  é semisimples à esquerda.
- (ii) Todo  $R$ -módulo à esquerda é injetivo.
- (iii) Todo  $R$ -módulo à esquerda finitamente gerado é injetivo.
- (iv) Todo  $R$ -módulo à esquerda cíclico é injetivo.

## 4 O Radical de Jacobson

A teoria dos anéis semisimples, tal como foi desenvolvida por Wedderburn para álgebras de dimensão finita, tinha um tratamento diferenciado do adaptado aqui. Ele definiu o radical de  $A$  para cada álgebra  $A$ , como sendo o maior ideal nilpotente de  $A$ , isto é, a soma de todos os seus ideais nilpotentes. Uma álgebra  $A$  é dita semisimple se o seu radical é zero. Este enfoque segue um paralelo com a teoria de E. Cartan para álgebras de Lie semisimples, que Cartan classificou completamente (sobre  $\mathcal{C}$ ).

Artin estendeu os resultados de Wedderburn para anéis que satisfazem DCC. Para um anel  $R$  nestas condições, a soma dos seus ideais nilpotentes é ainda nilpotente. Portanto  $R$  possui um maior ideal nilpotente  $w(R)$ , chamado o radical de Wedderburn de  $R$ . E a teoria pode ser estendida com sucesso para anéis que satisfazem DCC e com  $w(R) = 0$ .

Para um anel arbitrário  $R$ , já não é mais verdadeiro que a soma de todos os ideais nilpotentes é ainda nilpotente. Portanto,  $R$  pode não possuir mais um maior ideal nilpotente. O problema de encontrar uma adequada generalização do radical de  $R$  foi finalmente resolvido em 1945 por N. Jacobson, quem começou com a noção geral do radical para um anel arbitrário. Se  $R$  possui DCC sobre ideais unilaterais, então este radical  $J(R)$ , hoje chamado de radical de Jacobson, é igual à soma de todos os ideais nilpotentes de  $R$ . Assim, o radical de Jacobson provê um adequado substituto para o radical de Wedderburn. Mais ainda, desde sua formulação a teoria geral de Jacobson sobre o radical tem provado ser fundamental para o estudo da estrutura dos anéis. Nesta seção apresentaremos os principais resultados básicos desta teoria.

Tendo definido o radical de Jacobson  $J(R)$  de um anel  $R$ , podemos definir uma noção mais geral de semisimplicidade: um anel  $R$  será dito Jacobson (ou  $J$ -) semisimple se  $J(R) = 0$ . Estes anéis  $J$ -semisimples generalizam os anéis semisimples estudados na seção 4, e portanto devem ter um importante papel no estudo dos anéis que não necessariamente satisfazem DCC.

Existem outros radicais que generalizam o radical de Wedderburn. Estes outros radicais podem não ser tão fundamentais quanto o radical de Jacobson. Mas, em certo sentido eles refletem mais precisamente a estrutura dos ideais nil (e nilpotentes) de  $R$ . Assim, eles se parecem mais com o radical de Wedderburn. Estes radicais serão mencionados na próxima (e última) seção destas notas.

**Definição 5.1** *Seja  $R$  um anel. O radical de Jacobson  $J(R)$  de  $R$  é definido como sendo a interseção de todos os ideais maximais à esquerda de  $R$ .*

Notemos que se  $R$  é um anel não nulo, pelo Lema de Zorn  $R$  possui ideais à esquerda maximais.

Na definição acima deveríamos chamar  $J(R)$  de radical de Jacobson à esquerda. Isto é desnecessário, pois como veremos depois, a interseção de todos os ideais à esquerda maximais de  $R$  coincide com a interseção dos ideais à direita maximais. Assim sendo, as duas possíveis versões à esquerda e à direita coincidem. E adicionalmente teremos que  $J(R)$  é um ideal bilateral de  $R$ .

Começamos agora pelo seguinte

**Lema 5.2** *Sejam  $R$  um anel e  $y \in R$ . As seguintes condições são equivalentes:*

- (i)  $y \in J(R)$ ;
- (ii)  $1 - xy$  é inversível à esquerda, para todo  $x \in R$ ;
- (iii)  $yM = 0$ , para todo  $R$ -módulo à esquerda simples.

Prova. (i)→(ii): Se existir  $x \in R$  tal que  $1 - xy$  não é inversível à esquerda,  $R(1 - xy)$  é um ideal à esquerda próprio de  $R$ . Portanto, existe um ideal à esquerda maximal  $\mathcal{N}$  de  $R$  tal que  $1 - xy \in \mathcal{N}$ . Assim, como  $y \in \mathcal{N}$  obtemos a contradição  $1 \in \mathcal{N}$ .

(ii)→(iii): Suponhamos que  $M$  é um  $R$ -módulo à esquerda simples e que  $ym \neq 0$ , para algum  $m \in M$ . Sendo que  $M$  é simples temos que  $Rym = M$ . Portanto, existe  $x \in R$  tal que  $xym = m$ , ou seja,  $(1 - xy)m = 0$ . Isto é um absurdo, pois  $1 - xy$  é inversível à esquerda.

(iii)→(i): Se  $y \notin J(R)$ , existe um ideal à esquerda maximal  $\mathcal{M}$  de  $R$  tal que  $y \notin \mathcal{M}$ . Agora,  $R/\mathcal{M}$  é simples e, conseqüentemente,  $yR/\mathcal{M} = 0$ . Segue que  $y \in \mathcal{M}$ , o que é uma contradição. ■

Dado um  $R$  módulo à esquerda  $M$ , definimos  $Ann(M) = \{r \in R : rM = 0\}$ . Assim,  $Ann(M) \triangleleft R$ .

Suponhamos que  $M$  é cíclico. Então  $M \simeq R/I$ , para um ideal à esquerda  $I$  de  $R$ . Neste caso,

$$\begin{aligned} Ann(M) &= \{r \in R : rR/I = 0\} = \\ &= \{r \in R : rR \subseteq I\}. \end{aligned}$$

É fácil verificar que  $Ann(M)$  é o maior ideal bilateral de  $R$  contido em  $I$ . Denotaremos este ideal por  $(I : R)$ .

**Corolário 5.3**  $J(R) = \bigcap_M Ann(M)$ , onde  $M$  percorre todos os  $R$ -módulos à esquerda simples. Em particular,  $J(R)$  é um ideal bilateral de  $R$ .

Prova. Segue de (iii) do Lema 5.2. A última parte é conseqüência do fato que  $Ann(M) \triangleleft R$ . ■

Uma outra caracterização do radical de Jacobson é dada no seguinte

**Lema 5.4** *Seja  $y \in R$ . As seguintes condições são equivalentes:*

- (i)  $y \in J(R)$ ;
- (ii')  $1 - xyz \in U(R)$ , para todos  $x, z \in R$ .

Prova. (ii')→(i): Segue do lema 5.2, tomando  $z = 1$ .

(i)→(ii'): Se  $y \in J(R)$ , então  $yz \in J(R)$ . Logo  $1 - xyz$  é inversível à esquerda. Portanto existe  $u \in R$  tal que  $u(1 - xyz) = 1$ . Além disso  $xyz \in J(R)$

e, conseqüentemente,  $1 + uxyz$  é inversível à esquerda. Mas  $1 + uxyz = u$ , donde  $u$  é inversível em  $R$ . Segue que  $1 - xyz$  também é inversível em  $R$ . ■

**Corolário 5.5** (A)  $J(R)$  é o maior ideal à esquerda  $I$  de  $R$  tal que  $1 + I \subseteq U(R)$  (então  $J(R)$  é também o maior ideal  $I$  de  $R$  com esta propriedade).

(B)  $J(R)$  coincide com a interseção de todos os ideais maximais à direita de  $R$ .

Prova. (A) Se  $a \in J(R)$ , então  $1 + a \in U(R)$  por (ii'), Lema 5.4. Seja agora  $I$  um ideal à esquerda de  $R$ . Se  $b \in I$ , então  $xb \in I$  para todo  $x \in R$ . Assim  $1 - xb \in U(R)$  e segue que  $a \in J(R)$ . Logo  $I \subseteq J(R)$ .

(B) Segue da simetria da condição (A) (ou também da simetria de (ii')). ■

**Proposição 5.6** Seja  $I$  um ideal de  $R$  tal que  $I \subseteq J(R)$ . Então

$$J(R/I) = J(R)/I.$$

Prova. Segue da correspondência biunívoca entre os ideais de  $R/I$  e os ideais de  $R$  que contêm  $I$ . ■

Como já dissemos acima, a noção de radical de Jacobson conduz a uma nova noção de semisimplicidade.

**Definição 5.7** Um anel  $R$  é dito Jacobson semisimples (ou  $J$ -semisimples) se  $J(R) = 0$ .

Anéis Jacobson semisimples são chamados também semiprimitivos na literatura. A justificativa desta terminologia ficará clara mais adiante.

Alguns livros e trabalhos científicos também utilizam “semisimplicidade” em lugar de “ $J$ -semisimplicidade”. O leitor deve então ter cuidado para verificar qual terminologia o autor está utilizando em cada caso.

Da Proposição 5.6, o seguinte corolário é imediato.

**Corolário 5.8** Para todo anel  $R$ ,  $R/J(R)$  é semisimples.

Vamos agora provar que se  $R$  é um anel que satisfaz DCC sobre ideais à esquerda, então o radical  $J(R)$  de  $R$  é o maior ideal nilpotente de  $R$ . Começemos pelo seguinte

**Lema 5.9** Todo ideal à esquerda (direita) nil de  $R$  está contido em  $J(R)$ .

Prova. Seja  $I$  um ideal à esquerda nil de  $R$ . Se  $x \in I$ , então  $a = yx \in I$  para todo  $y \in R$ . Portanto  $a$  é nilpotente e assim existe um número  $n \geq 1$  tal que  $a^n = 0$ .

É claro que  $(1 + a + \dots + a^{n-1})(1 - yx) = 1$ . Assim  $1 - yx$  é inversível à esquerda e segue que  $x \in J(R)$ . ■

Agora estamos em condições de provar o seguinte

**Teorema 5.10** *Seja  $R$  um anel artiniano à esquerda. Então  $J(R)$  é o maior ideal nilpotente de  $R$ .*

Prova. Pelo Lema 5.9 é suficiente mostrarmos que  $J =: J(R)$  é nilpotente.

Consideremos  $J \supseteq J^2 \supseteq J^3 \supseteq \dots$ . Então existe um número  $n \geq 1$  tal que  $J^{n+1} = J^n$ . Seja  $I =: J^n$ .

Se  $I \neq 0$ , como  $I^2 = I$  segue que a família de todos os subideais à esquerda  $B$  de  $R$  tais que  $IB \neq 0$  é não vazia. Portanto, existe um ideal à esquerda minimal  $A$  de  $R$  tal que  $IA \neq 0$ . Seja  $a \in A$  tal que  $Ia \neq 0$ .

Sendo que  $I(Ia) = I^2a = Ia \neq 0$ , temos que  $Ia = A$  (note que  $Ia \subseteq A$ ). Assim existe  $x \in I$  tal que  $xa = a$ , isto é,  $(1-x)a = 0$ . Mas, como  $x \in J(R)$ ,  $1-x \in U(R)$ . Logo  $a = 0$ , o que é uma contradição.

Logo  $J^n = I = 0$ , o que completa a prova. ■

**Corolário 5.11** *Se  $R$  é um anel artiniano à esquerda (direita), então todo nil ideal de  $R$  é nilpotente, e reciprocamente.*

Prova. Todo ideal nilpotente é nil. Reciprocamente, se  $I$  é um nil ideal, então  $I \subseteq J(R)$ . Logo  $I$  é nilpotente. ■

Agora podemos relacionar os dois tipos de semisimplicidade utilizados até agora.

**Teorema 5.12** *As seguintes condições são equivalentes:*

- (i)  $R$  é semisimples à esquerda;
- (ii)  $R$  é  $J$ -semisimples e artiniano à esquerda (direita).

Prova. (i)→(ii): Por hipótese, o ideal  $J(R)$  é um somando direto de  ${}_R R$ . Portanto existe um idempotente  $e \in J(R)$  tal que  $J(R) = Re$ . Mas,  $1-e \in U(R)$  e  $e(1-e) = 0$ . Segue que  $e = 0$  e logo  $J(R) = 0$ .

(ii)→(i): Observemos primeiro que todo ideal à esquerda minimal  $I$  de  $R$  é um somando direto. De fato, como  $J(R) = 0$ , existe um ideal à esquerda maximal  $\mathcal{M}$  de  $R$  tal que  $I \not\subseteq \mathcal{M}$ . Sendo  $I$  minimal, obtemos  $I \cap \mathcal{M} = 0$  e  $I + \mathcal{M} = R$ . Logo  $I \oplus \mathcal{M} = R$ .

Sendo que  $R$  é artiniano, existe um ideal à esquerda  $B_1$  tal que  $R = A \oplus B_1$ . Aplicando outra vez a artinianidade, existe um ideal à esquerda minimal  $A \subseteq B_1$  de  $R$ . Além disso,  $A_2 \oplus B_2 = R$ , para algum ideal à esquerda  $B_2$ . Obtemos assim  $R = A_1 \oplus A_2 \oplus (B_1 \cap B_2)$ .

Repetindo o procedimento, obtemos

$$R = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n \oplus (B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n),$$

onde  $B_1 \supset B_1 \cap B_2 \supset \dots \supset B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n$ , e os ideais à esquerda  $A_i$  são minimais.

Por hipótese, existe um inteiro  $m$  tal que  $B_1 \cap \dots \cap B_m = 0$  e assim  $R = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$  é semisimples. ■

O seguinte resultado é de importância fundamental na teoria de anéis e módulos.

**Teorema 5.13** (Lema de Nakayama)

Seja  $J$  um ideal à esquerda do anel  $R$ . As seguintes condições são equivalentes:

- (i)  $J \subseteq J(R)$ ;
- (ii) Para todo  $R$ -módulo à esquerda finitamente gerado  $M$ ,  $JM = M$  implica  $M = 0$ ;
- (iii) Para todo  $R$ -módulo à esquerda  $M$  e todo submódulo  $N$  tais que  $M/N$  é finitamente gerado,  $N + JM = M$  implica  $N = M$ .

Prova. (i)→(ii): Seja  $M$  um  $R$ -módulo à esquerda finitamente gerado não nulo. Podemos então aplicar o Lema de Zorn para determinar um submódulo maximal  $P$  de  $M$ . Assim,  $M/P$  é simples e  $J(M/P) = 0$ , isto é,  $JM \subseteq P$ . Logo  $JM \neq M$ .

(ii)→(iii): É suficiente aplicar (ii) ao módulo  $M/N$ .

(iii)→(i): Suponhamos que existe  $J \not\subseteq J(R)$ . Então existe um ideal maximal à esquerda  $\mathcal{M}$  tal que  $J \not\subseteq \mathcal{M}$ . Assim  $\mathcal{M} + J = R$  e, sendo que  $R/\mathcal{M}$  é finitamente gerado, segue que  $\mathcal{M} = R$ , contradição. ■

Quando Artin estendeu a teoria de Wedderburn, parece que ele não observou que para anéis DCC implica ACC. Ele assumiu no seu trabalho ambas as condições ACC e DCC. Este resultado foi obtido anos depois por Hopkins e Levitzki, independentemente. Para concluir esta seção, apresentaremos uma prova para a seguinte versão mais geral deste resultado.

**Teorema 5.14** *Seja  $R$  um anel para o qual  $J(R)$  é nilpotente e  $R/J(R)$  é semisimples. Então para todo  $R$ -módulo à esquerda  $M$ , as seguintes condições são equivalentes:*

- (i)  $M$  é noetheriano;
- (ii)  $M$  é artiniano;
- (iii)  $M$  possui uma série composição.

Prova. Pelos resultados da seção 2, (iii) implica (i) e (ii). Logo será suficiente provar que (i)→(ii) e que (ii)→(iii). Suponhamos que  $M$  é noetheriano ou artiniano. Seja  $n \geq 1$  um inteiro tal que  $J^n = 0$  e seja  $\bar{R} = R/J$ . consideremos a filtração

$$M \supseteq JM \supseteq J^2M \supseteq \dots \supseteq J^nM = 0.$$

É suficiente provar que cada fator  $P_i =: J^iM/J^{i+1}M$  possui uma série composição. Note que  $P_i$  é noetheriano ou artiniano, como módulo à esquerda sobre  $\bar{R}$ . Portanto,  $P_i$  é uma soma direta de  $\bar{R}$ -módulos simples, sendo que  $\bar{R}$  é semisimples. A condição ACC ou DCC implica que esta soma é finita. Segue que  $P_i$  possui, de fato, uma série composição como um  $\bar{R}$ -módulo. Finalmente, como para todo módulo simples  $N$  temos que  $JN = 0$ , a série é também uma série composição como  $R$ -módulo. ■

Um anel que satisfaz as condições do Teorema 5.14 é chamado um anel semiprimário.

**Corolário 5.15** (1) *Um anel é artiniano à esquerda se e somente se é noetheriano à esquerda e semiprimário.*

(2) *Um módulo à esquerda finitamente gerado sobre um anel artiniano à esquerda  $R$  possui uma série composição.*

Prova. Pelos Teoremas 5.10 e 5.12, se  $R$  é artiniano à esquerda, então  $R$  é semiprimário. Logo (1) é consequência do Teorema 5.14.

Sendo que módulos à esquerda finitamente gerados sobre anéis artinianos à esquerda são artinianos, (2) segue também do Teorema 5.14. ■

## 5 Estrutura de Anéis J-Semisimples

O principal objetivo desta seção é provar o Teorema da Densidade de Jacobson e Chevalley. Este resultado, aplicado à classe dos anéis artinianos, recuperará o Teorema de Wedderburn-Artin.

Além disso, introduzimos a classe dos anéis primitivos à esquerda. Aplicado a esta classe, o Teorema da Densidade estabelece que todo anel primitivo à esquerda é um subanel “denso” de um anel de transformações lineares de um espaço vetorial sobre um anel de divisão. Este teorema de estrutura para anéis primitivos é uma extensão do Teorema de Wedderburn-Artin para anéis artinianos simples.

Um anel  $J$ -semisimples será chamado, nesta seção, de semiprimativo. Para motivar a definição de anel primitivo, vejamos primeiro a seguinte caracterização de anel semiprimativo.

**Proposição 6.1** *Um anel  $R$  é semiprimativo se, e somente se, existir um  $R$ -módulo à esquerda semisimples fiel.*

Prova. Seja  $M$  um módulo à esquerda semisimples fiel e seja  $M = \sum_i \oplus M_i$  a decomposição de  $M$  como soma de módulos simples. Sabemos que  $J(R)M_i = 0$ , para todo  $i$ , portanto  $J(R)M = 0$ . Mas, como  $M$  é fiel, segue que  $J(R) = 0$ .

Reciprocamente, suponhamos que  $J(R) = 0$  e seja  $(M_i)_{i \in \Omega}$  a família de todos os  $R$ -módulos à esquerda simples (um para cada classe de isomorfismo). Então  $M = \sum_{i \in \Omega} \oplus M_i$  é semisimples e  $\text{Ann}(M) = \bigcap_{i \in \Omega} \text{Ann}(M_i) = J(R) = 0$ . Logo  $M$  é semisimples e fiel. ■

Motivados pelo resultado anterior damos a seguinte:

**Definição 6.2** *Um anel  $R$  é dito primitivo à esquerda se existir um  $R$ -módulo à esquerda simples e fiel.*

Obviamente, a mesma definição pode ser dada para anéis primitivos à direita. Devemos notar que a definição não é simétrica. Um exemplo de um anel primitivo à esquerda, que não é primitivo à direita foi dado por G. Bergman em 1965. Mas, como já sabemos, a noção de semiprimatividade é simétrica.

Se  $R$  é um anel de divisão, um espaço vetorial à direita sobre  $R$  é simples e fiel. Logo  $R$  é primitivo à esquerda e à direita.

Se  $R$  é um anel comutativo e primitivo, então  $R$  é um corpo. De fato, se  $M$  é um  $R$ -módulo simples e fiel, então  $M \simeq R/\mathcal{M}$ , para um ideal maximal  $\mathcal{M}$  de  $R$ . Mas  $\mathcal{M}M = 0$  e, portanto  $\mathcal{M} = 0$ .

É útil estender a noção de primitividade para ideais.

**Definição 6.** *Um ideal  $I$  de um anel  $R$  é dito primitivo à esquerda (resp. à direita) se  $R/I$  é um anel primitivo à esquerda (resp. à direita).*

**Proposição 6.4** *Seja  $I$  um ideal de  $R$ . Então  $I$  é primitivo à esquerda (resp. à direita) se  $I$  é o anulador de um  $R$ -módulo à esquerda (resp. à direita) simples.*

Prova. Seja  $I = \text{Ann}(M)$ , onde  ${}_R M$  é simples. Então  $M$  pode ser considerado como um  $R/I$ -módulo à esquerda simples e fiel. Logo  $R/I$  é primitivo à esquerda, isto é,  $I$  é um ideal primitivo à esquerda.

Reciprocamente, se  $R/I$  é primitivo à esquerda, então existe um módulo  ${}_{R/I} M$  simples e fiel. Logo  ${}_R M$  é simples e  $\text{Ann}(M) = I$ . ■

Lembrando agora a caracterização do Lema 5.2 (não seria Corolário 5.3?) resulta o seguinte:

**Corolário 6.5** *O radical de Jacobson de  $R$  é igual a interseção de todos os ideais primitivos à esquerda (direita) de  $R$ .*

É útil comparar a classe de anéis primitivos com outras classes de anéis igualmente importantes. Para fazer isso introduzimos agora duas outras definições, ainda que isso não seja estritamente necessário para estudar a estrutura de anéis primitivos e semiprimitivos.

**Definição 6.6** *Um anel  $R$  é dito primo se, para quaisquer ideais  $A, B$  de  $R$ , temos que  $AB = 0$  implica  $A = 0$  ou  $B = 0$ .*

Esta definição estende naturalmente a noção de domínio de integridade em anéis comutativos. Uma outra possibilidade seria a de utilizar diretamente como definição:  $ab = 0$ , com  $a, b \in R$ , implica  $a = 0$  ou  $b = 0$ . Um anel não comutativo que satisfaz esta propriedade chama-se também um domínio, mas é conveniente salientar que a definição acima é a extensão mais útil para o conceito de domínio. Não poderemos justificar nestas notas esta afirmação. O leitor pode observar que das definições resulta que um anel de matrizes sobre um anel de divisão é um anel primo, mas não é um domínio.

**Definição 6.7** *Um anel  $R$  é dito semiprimo se, para qualquer ideal  $A$  de  $R$ ,  $A^n = 0$ , com  $n \geq 1$ , implica  $A = 0$ .*

Um anel semiprimo pode também ser definido pela condição:  $A^2 = 0$  implica  $A = 0$ . É claro que todo anel primo é semiprimo.

**Definição 6.8** *Um ideal  $P$  de um anel  $R$  é dito primo (resp. semiprimo) se*

$R/P$  é um anel primo (resp. semiprimo).

Um ideal  $P$  de  $R$  é primo (resp. semiprimo) se, e somente se, para quaisquer ideais  $A$  e  $B$  de  $R$  (resp.  $A$  de  $R$ ), temos que  $AB \subseteq P$  (resp.  $A^2 \subseteq P$ ) implica  $A \subseteq P$  ou  $B \subseteq P$  (resp.  $A \subseteq P$ ).

É claro que uma interseção de ideais primos é um ideal semiprimo.

Vamos agora comparar estas classes de anéis com as classes dos anéis primitivos à direita (resp. semiprimitivos).

**Proposição 6.9** (1) *Todo anel simples é primitivo (à esquerda e à direita).*  
 (2) *Todo anel primitivo (à esquerda ou à direita) é primo.*

Prova. (1) Seja  $\mathcal{M}$  um ideal maximal à esquerda de  $R$ . Então  $M = R/\mathcal{M}$  é um módulo à esquerda simples. Além disso,  $M$  é fiel, pois  $\text{Ann}(M)$  é um ideal bilateral do anel simples  $R$ .

(2) Suponhamos que  $R$  é primitivo à esquerda e seja  $M$  um  $R$ -módulo à esquerda fiel. Se  $A$  e  $B$  são ideais de  $R$  e  $AB = 0$ , então  $ABM = 0$ . Como  $BM$  é um submódulo de  $M$  temos duas possibilidades: Se  $BM = 0$ , então  $B \subseteq \text{Ann}(M) = 0$ . Se  $BM = M$ , então  $0 = ABM = AM$  e segue que  $A = 0$ . ■

É claro que todo anel primitivo à esquerda é semiprimitivo, pela Proposição 6.1. Num anel semiprimitivo  $R$  o ideal nulo é interseção de ideais primitivos à esquerda. Logo  $R$  é semiprimo. Assim temos as seguintes implicações:

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{semisimples} & \implies & \text{semiprimitivo} & \implies & \text{semiprimo} \\
 \uparrow(\text{se DCC}) & & \uparrow & & \uparrow \\
 \text{simples} & \implies & \text{primitivo à esquerda} & \implies & \text{primo}
 \end{array}$$

As implicações do diagrama acima não são reversíveis, mas o são sob a hipótese de que o anel é artiniano à esquerda.

**Proposição 6.10** *Seja  $R$  um anel artiniano à esquerda. Então:*

(1)  $R$  é semisimples  $\iff R$  é semiprimitivo  $\iff R$  é semiprimo.

(2)  $R$  é simples  $\iff R$  é primitivo à esquerda  $\iff R$  é primo.

Prova. (1) É suficiente provarmos que, se  $R$  é semiprimo e artiniano à esquerda, então  $R$  é semisimples. O argumento é o mesmo utilizado no Teorema ?????? e, portanto será omitido aqui.

(2) Se  $R$  é primo, então  $R$  é semiprimo. Então por (1)  $R$  é semisimples. Assim, pelo Teorema de Wedderburn-Artin,  $R$  é um produto direto finito de anéis de matrizes sobre anéis de divisão. Como cada componente nesta decomposição é um ideal de  $R$  e o produto de componentes distintas é nulo, o fato de  $R$  ser primo implica que existe somente uma componente. Logo  $R$  é simples. ■

Vamos agora provar o Teorema da Densidade para anéis semiprimitivos. A estrutura de um anel primitivo à esquerda resultará como consequência deste teorema.

Vamos primeiramente definir a noção de densidade. Sejam  $R$  e  $S$  dois anéis e  $M$  um  $RS$ -bimódulo à esquerda sobre  $R$  e à direita sobre  $S$ . Escrevemos  $E =: \text{End}(M_S)$ , o qual age sobre  $M$  à esquerda. Por outro lado,  $R$  também age sobre  $M_S$  e cada elemento  $r \in R$  define um elemento  $\rho(r) \in E$  por  $\rho(r)(x) = rx$ .

Dizemos que  $R$  age densamente em  $M_S$  se, para todo  $f \in E$  e  $v_1, \dots, v_n \in M$ , existe  $r \in R$  tal que  $f(v_i) = rv_i$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ .

Seja  $M$  um  $R$ -módulo semisimples,  $S = \text{End}(M)$  e  $E = \text{End}(M_S)$ . Então  $M$  é um  $ES$ -bimódulo e podemos considerar  $\rho(R) \subseteq E$ , onde  $\rho$  é como antes. Temos o seguinte:

**Lema 6.11** *Sob as condições acima, se  $N$  é um  $R$ -submódulo de  $M$ , então  $N$  é também um  $E$ -submódulo.*

Prova. Sendo que  $M$  é semisimples, existe um  $R$ -submódulo  $P$  de  $M$  tal que  $M = N \oplus P$ . Seja  $e \in S$  a projeção canônica sobre o submódulo  $N$  e seja  $f \in E$ . Temos  $f(N) = f(Ne) = F(N)e \subseteq N$ . Logo  $N$  é um  $E$ -submódulo. ■

Provemos agora o teorema fundamental desta seção.

**Teorema 6.12 (Teorema da Densidade de Jacobson e Chevalley)** *Seja  $R$  um anel e  $M$  um  $R$ -módulo à esquerda semisimples. Então, para  $S =: \text{End}(M)$ ,  $R$  age densamente em  $M_S$ .*

Prova. Como antes, seja  $E = \text{End}(M_S)$ . Para  $f \in E$  e  $v_1, \dots, v_n \in M$ , temos que encontrar um elemento  $r \in R$  tal que  $f(v_i) = rv_i$ , para todo  $i$ .

Seja  $V = M^n$ , a soma direta de  $n$  cópias de  $M$ . Então  $V$  é um  $R$ -módulo semisimples. Além disso, pelo Exercício ??????, temos que

$$S' = \text{End}(R V) = \text{End}(R M^n) \simeq M_n(\text{End}(R M)) = M_n(S).$$

Seja agora  $\varphi : V \rightarrow V$  definida por  $\varphi = (f, f, \dots, f)$ . Então  $\varphi \in \text{End}(V_{S'})$ . De fato, se  $e = (e_{ij})$  é uma matriz de  $M_n(S)$ , para qualquer  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in V$ , temos

$$\begin{aligned} \varphi((x_1, \dots, x_n)e) &= \varphi(\sum x_i e_{i1}, \dots, \sum x_i e_{in}) = \\ &= (f(\sum x_i e_{i1}), \dots, f(\sum x_i e_{in})) = \\ &= (\sum f(x_i) e_{i1}, \dots, \sum f(x_i) e_{in}) = \\ &= (f(x_1), \dots, f(x_n))e = \\ &= \varphi(x_1, \dots, x_n)e. \end{aligned}$$

Consideremos agora o  $R$ -módulo cíclico  $W$  de  $V$  gerado por  $(v_1, \dots, v_n) \in V$ . Pelo lema anterior, aplicado a  $W \subset V$ ,  $W$  é um  $\text{End}(V_{S'})$ -módulo à esquerda. Em particular, como  $\varphi \in \text{End}(V_{S'})$ , temos  $\varphi(v_1, \dots, v_n) \in W$ . Portanto, existe  $r \in R$  tal que  $\varphi(v_1, \dots, v_n) = r(v_1, \dots, v_n)$ . Conseqüentemente,  $f(v_i) = rv_i$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$ . ■

**Corolário 6.13** *Sejam  $R, M, S$  e  $E$  como no Teorema da Densidade. Se  $M_S$  é finitamente gerado, então a aplicação natural  $\rho : R \rightarrow E$  é sobrejetora.*

Prova. Sejam  $v_1, \dots, v_n \in M$  um sistema de geradores do  $S$ -módulo à direita  $M$ . Se  $f \in E$ , existe  $r \in R$  tal que  $f(v_i) = rv_i, i = 1, \dots, n$ . Se  $v \in M$ , então  $v = \sum v_i a_i$ , onde  $a_i \in S$ . Portanto,  $f(v) = \sum f(v_i) a_i = \sum rv_i a_i = rv$  e segue que  $f = \rho(r)$ . ■

O principal caso de interesse, do Teorema da Densidade, é quando  $M$  é um  $R$ -módulo simples. Neste caso sabemos, pelo Lema de Schur, que  $S = \text{End}({}_R M)$  é um anel de divisão. No que segue denotamos  $S$  por  $D$ . Portanto,  $M_D$  é um espaço vetorial.

Lembremos que, se  $V_D$  é um espaço vetorial sobre o anel de divisão  $D$ ,  $E =: \text{End}(V_D)$  e  $S \subseteq E$ ,  $S$  é dito  $m$ -transitivo sobre  $V$  se, para todo subconjunto de  $n \leq m$  vetores linearmente independentes  $v_1, v_2, \dots, v_n$  de  $V$  e quaisquer vetores  $w_1, \dots, w_n$ , existir um elemento  $s \in S$  tal que  $s(v_i) = w_i$ , para todo  $i$ .

Da definição resulta que  $S$  é um subconjunto denso de transformações lineares de  $V_D$  se  $S$  é  $m$ -transitivo para todo número (finito)  $m$ .

A seguinte proposição garante que a terminologia adotada é consistente.

**Proposição 6.14** *Sejam  ${}_R M_D$  um  $RD$ -bimódulo, onde  $D$  é um anel de divisão,  $E = \text{End}(M_D)$  e  $\rho : R \rightarrow E$  a aplicação natural. Então  $R$  age fielmente sobre  $M_D$  se, e somente se,  $\rho(R)$  é um subanel denso de transformações lineares de  $V$ .*

Prova. Suponhamos que  $\rho(R)$  é um anel denso de transformações lineares de  $M$ . Se  $f \in E$  e  $v_1, v_2, \dots, v_n \in M$ , podemos supor que o subconjunto  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  é linearmente independente e cada  $v_i, m < i \leq n$ , é combinação linear dos elementos de  $B$ . Por hipótese, existe  $r \in R$  tal que  $f(v_i) = rv_i$ , para todo  $i \leq m$ . É fácil agora provar que esta relação vale também para  $m < i \leq n$ . A recíproca é evidente. ■

Combinando os resultados anteriores temos como caso particular do Teorema da Densidade, o seguinte teorema de estrutura para anéis primitivos à esquerda.

**Proposição 6.14** *Sejam  $R$  um anel primitivo à esquerda e  $M$  um  $R$ -módulo à esquerda fiel. Se  $D$  é o anel de divisão  $\text{End}({}_R M)$ , então  $R$  é isomorfo a um anel denso de transformações lineares de  $M_D$ . Mais ainda:*

- (1) *Se  $R$  é artiniano à esquerda, então  $n =: \dim_D M < \infty$  e  $R \simeq M_n(D)$ .*
- (2) *Se  $R$  não é artiniano à esquerda, então  $\dim_D M$  é infinita e, para todo inteiro positivo  $n$ , existe um subanel  $R_n$  de  $R$  que admite um epimorfismo de anéis sobre  $M_n(D)$ .*

Prova. Sendo que  ${}_R M$  é fiel, então a aplicação natural

$$\rho : R \rightarrow E =: \text{End}(M_D)$$

é injetiva. Além disso, por 6.12 e 6.14,  $\rho(R)$  é um subanel denso de transformações lineares de  $M$ . A primeira parte segue.

Suponhamos que  $\dim_D(M) = n < \infty$ . Pelo Corolário 6.13 temos  $\rho(R) = E$ , assim  $R \simeq M_n(D)$  e  $R$  é artiniiano à esquerda.

Assumimos agora que  $\dim_D(M)$  é infinita. Então existe uma seqüência de elementos  $v_1, v_2, \dots$  em  $M$  que são linearmente independentes.

Sejam  $V_n = \sum_{i=1}^n v_i D$ , para  $1 \leq n < \infty$ ,  $R_n = \{r \in R : r(V_n) \subseteq V_n\}$  e  $I_n = \{r \in R : r(V_n) = 0\}$ . Então  $R_n$  é um subanel de  $R$  e  $I_n$  um ideal à esquerda de  $R$  que é um ideal de  $R_n$ . É claro que  $R_n/I_n$  age fielmente no espaço vetorial  $V_n$ . Além disso, pela  $n$ -transitividade de  $R$  sobre  $M$ , toda  $D$ -transformação linear de  $V_n$  pode ser realizada pela ação de um elemento  $r \in R_n$ . Portanto, a aplicação  $R_n/I_n \rightarrow \text{End}((V_n)_D)$  é um isomorfismo e assim  $R_n/I_n \simeq M_n(D)$ .

Mais ainda, a  $(n+1)$ -transitividade implica que existe  $r \in R$  tal que  $rv_1 = \dots = rv_n = 0$  e  $rv_{n+1} \neq 0$ . Logo  $I_n \supset I_{n+1}$ , para todo  $n$ . Portanto,  $R$  não é artiniiano à esquerda, pois os  $I_n$  são ideais à esquerda de  $R$ .

É fácil ver que os argumentos dados completam a prova. ■

## 6 Outros Radicais de Anéis

Existem vários outros radicais de anéis que são bastante estudados e correspondentes teoremas de estrutura.

O principal objetivo que temos ao definir um radical  $\rho(R)$  de um anel  $R$  é o de tentar “eliminar” elementos não desejáveis. Deste modo, quando estudamos o quociente de  $R$  pelo radical, não teremos mais elementos indesejáveis, e a estrutura do quociente poderá ser mais facilmente determinada. Ou seja, a estrutura de um anel  $\rho$ -semisimples poderá ser estudada com maior facilidade.

Por exemplo, se  $R$  é um anel comutativo e  $N(R)$  é o conjunto de todos os elementos nilpotentes de  $R$ . Então  $N(R)$  é um ideal de  $R$  e  $R/N(R)$  não tem elementos nilpotentes não nulos. Portanto o anel  $R/N(R)$  é um anel reduzido e, em diversas situações, a estrutura deste anel será mais transparente.

Existem vários radicais em anéis não comutativos que são bastante estudados na literatura. Para finalizar nosso estudo, vamos considerar rapidamente aqui os mais populares deles.

Lembramos que um ideal  $P$  de um anel  $R$  é chamado primo se para quaisquer ideais  $A$  e  $B$  de  $R$  temos  $AB \subseteq P$  implica  $A \subseteq P$  ou  $B \subseteq P$ .

Na seguinte proposição,  $(a)$  denota o ideal de  $R$  gerado pelo elementos  $a$ :  $RaR$ . As seguintes são várias caracterizações de ideais primos.

**Proposição 7.1** *Seja  $P$  um ideal do anel  $R$ . As seguintes condições são equivalentes:*

- (i)  $P$  é primo;
- (ii) Se  $a, b \in R$ ,  $(a)(b) \subseteq P$  implica  $a \in P$  ou  $b \in P$ ;
- (iii) Se  $a, b \in R$ ,  $aRb \subseteq P$  implica  $a \in P$  ou  $b \in P$ ;
- (iv) Se  $A$  e  $B$  são ideais à esquerda (direita) de  $R$ ,  $AB \subseteq P$  implica  $A \subseteq P$  ou  $B \subseteq P$ .

Prova. (i)→(ii) e (iv)→(i) são claras.

(ii)→(iii): Se  $aRb \subseteq P$ , então  $(RaR)(RbR) \subseteq RaRbR \subseteq P$ . Logo, por (ii),  $a \in P$  ou  $b \in P$ .

(iii)→(iv): Sejam  $A$  e  $B$  ideais à esquerda de  $R$  tais que  $AB \subseteq P$ . Se  $a \notin P$  e  $B \not\subseteq P$ , existem elementos  $a \in A \setminus P$  e  $b \in B \setminus P$ . Assim  $aRb \subseteq P$ , o que contradiz (iii). ■

Sabemos já que todo ideal primitivo à esquerda (direita) de  $R$  é primo (Proposição ???). Seja  $\mathcal{M}$  um ideal maximal de  $R$ . Se  $A$  e  $B$  são ideais de  $R$  tais que  $A \not\subseteq \mathcal{M}$  e  $B \not\subseteq \mathcal{M}$ , então  $A + \mathcal{M} = R = B + \mathcal{M}$ . Logo  $R = R^2 = (A + \mathcal{M})(B + \mathcal{M}) = AB + \mathcal{M}$ , e segue que  $AB \subseteq \mathcal{M}$ . Conseqüentemente, todo ideal maximal é primo.

Na Álgebra Comutativa, ideais primos estão intimamente relacionados com conjuntos multiplicativamente fechados. O complemento de um ideal primo é multiplicativamente fechado e, dado um conjunto multiplicativamente fechado  $S$ , um ideal disjunto de  $S$  e maximal com respeito a esta propriedade é primo. Provaremos um resultado análogo para anéis não comutativos.

**Definição 7.2** Um subconjunto não vazio  $S$  de  $R$  é chamado um  $m$ -sistema se, para quaisquer  $a, b \in S$ , existir um elemento  $r \in R$  tal que  $arb \in S$ .

Por exemplo, um subconjunto (não vazio) multiplicativamente fechado é um  $m$ -sistema. A recíproca não é verdadeira. De fato, se  $a \in R$ ,  $\{a, a^2, a^3, a^4, \dots\}$  é um  $m$ -sistema, mas não é multiplicativamente fechado.

Da Proposição 7.1 segue o seguinte

**Corolário 7.3** Um ideal  $P$  de  $R$  é primo se, e somente se,  $R \setminus P$  é um  $m$ -sistema.

Prova. Basta aplicar (iii) de 7.1. ■

**Proposição 7.4** Sejam  $S \subseteq R$  um  $m$ -sistema e  $P$  um ideal maximal com respeito à propriedade  $P \cap S = 0$ . Então  $P$  é um ideal primo de  $R$ .

Prova. Suponhamos que  $a \notin P$ ,  $b \notin P$  e  $(a)(b) \subseteq P$ . Pela maximalidade de  $P$ , temos que existem  $s, t \in S$  tais que  $s \in P + (a)$  e  $t \in P + (b)$ . Tomemos  $r \in R$  com  $srt \in S$ . Agora,

$$srt \in (P + (a))R(P + (b)) \subseteq P + (a)(b) \subseteq P,$$

o que é uma contradição. Portanto,  $P$  deve ser um ideal primo. ■

**Definição 7.5** Dado um ideal  $I$  de  $R$ , o radical  $\sqrt{I}$  de  $I$  é definido por

$$\sqrt{I} = \{s \in R : \text{todo } m\text{-sistema que contém } s \text{ intersecta } I\}.$$

Note que se  $a \in \sqrt{I}$ , então o  $m$ -sistema  $\{a, a^2, a^3, \dots\}$  deve intersectar  $I$ . Portanto, existe  $n \geq 1$  tal que  $a^n \in I$ . Veremos logo que a recíproca vale em anéis comutativos.

Agora estamos em condições de provar o seguinte interessante resultado.

**Teorema 7.6** *Seja  $R$  um anel e  $I$  um ideal de  $R$ . Então  $\sqrt{I}$  é igual à interseção de todos os ideais primos de  $R$  que contêm  $I$ . Em particular,  $\sqrt{I}$  é um ideal de  $R$ .*

Prova. Sejam  $s \in \sqrt{I}$  e  $P$  um ideal primo de  $R$  que contém  $I$ . Então o  $m$ -sistema  $R \setminus P$  não pode conter  $s$ , pois neste caso deveria intersectar  $P$ . Logo  $s \in P$ .

Reciprocamente, suponhamos que  $s \notin \sqrt{I}$ . Então, por definição, existe um  $m$ -sistema  $S$  que contém  $s$  e que é disjunto de  $I$ . Pelo Lema de Zorn, existe um ideal  $P$  de  $R$  tal que  $P \supseteq I$  e é maximal com respeito à propriedade  $P \cap S = 0$ . Assim,  $P$  é primo e  $s \notin P$ . Isto completa a prova. ■

Do Teorema 7.6 e de resultados conhecidos de Álgebra Comutativa, segue que se  $R$  é comutativo, então

$$\sqrt{I} = \{a \in R : \text{ existe } n \geq 1 \text{ tal que } a^n \in I\}.$$

Lembramos agora a definição de ideais semiprimos.

**Definição 7.7** *Um ideal  $I$  de  $R$  é dito semiprimo se, para qualquer ideal  $A$  de  $R$ ,  $A^2 \subseteq I$  implica  $A \subseteq I$ .*

É claro da definição que um ideal primo, ou mais geralmente uma interseção de ideais primos, é semiprimo. Da Proposição 7.1 segue facilmente a seguinte

**Proposição 7.8** *Seja  $I$  um ideal de  $R$ . As seguintes condições são equivalentes:*

- (i)  $I$  é semiprimo;
- (ii) Para todo  $a \in R$ ,  $(a)^2 \subseteq I$  implica  $a \in I$ ;
- (iii) Para todo  $a \in R$ ,  $aRa \subseteq I$  implica  $a \in I$ ;
- (iv) Para todo ideal à esquerda (direita)  $A$  de  $R$ ,  $A^2 \subseteq I$  implica  $A \subseteq I$ .

Para obter algumas caracterizações de ideais primos, vejamos antes alguns resultados prévios.

**Definição 7.9** *Seja  $S$  um subconjunto de  $R$ . Dizemos que  $S$  é um  $n$ -sistema se para todo  $a \in S$  existir  $r \in R$  tal que  $ara \in S$ .*

Segue da Proposição 7.8, (iii), que um ideal  $I$  de  $R$  é semiprimo se, e somente se,  $R \setminus I$  é um  $n$ -sistema.

**Lema 7.10** *Seja  $N$  um  $n$ -sistema de um anel  $R$  e seja  $a \in N$ . Então existe um  $m$ -sistema  $M \subseteq N$  tal que  $a \in M$ .*

Prova. Definimos  $M = \{a_1, a_2, \dots\}$  indutivamente, como segue: tomemos  $a_1 = a$ ; como  $N$  é um  $n$ -sistema existe  $r_1 \in R$  tal que  $a_2 = a_1 r_1 a_1 \in N$ .

Analogamente,  $a_3 = a_2 r_2 a_2 \in N$ , para certo  $r_2 \in R, \dots$ , etc. É fácil ver que  $M$  é um  $m$ -sistema que satisfaz as condições requeridas. ■

Agora estamos em condições de provar o seguinte

**Teorema 7.11** *Seja  $I$  um ideal de  $R$ . As seguintes condições são equivalentes:*

- (i)  $I$  é um ideal semiprimo;
- (ii)  $I$  é uma interseção de ideais primos;
- (iii)  $I = \sqrt{I}$ .

Prova. (iii)→(ii) segue do Teorema 7.6. (ii)→(i) é óbvio, pela definição de ideal semiprimo. Vejamos finalmente que (i)→(iii).

Seja  $a \notin I$ . Então  $N = R \setminus I$  é um  $n$ -sistema com  $a \in N$ . Logo, existe um  $m$ -sistema  $M$  tal que  $a \in M \subseteq N$ . Assim,  $M \cap I = 0$  e, pela Definição 7.5,  $a \notin \sqrt{I}$ . Conseqüentemente,  $\sqrt{I} = I$  e a prova está completa. ■

Note que, do teorema anterior segue que, no caso comutativo, os ideais semiprimos são exatamente os ideais radicais.

**Corolário 7.12** *Para qualquer ideal  $I$  de  $R$ ,  $\sqrt{I}$  é o menor ideal semiprimo de  $R$  que contém  $I$ .*

No caso especial em que  $I = 0$ , temos a definição de um novo radical.

**Definição 7.13** *Para qualquer anel  $R$ , o nil radical inferior  $\beta(R)$  de  $R$  é definido por  $\beta(R) = \sqrt{(0)}$ .*

Da observação posterior à Definição 7.5 segue que  $\beta(R)$  é um nil ideal de  $R$ . Por esta razão temos também que  $\beta(R) \subseteq J(R)$ .

A denominação de nil radical inferior será justificada mais adiante. De fato, veremos que existe outro nil radical maior que  $\beta(R)$ .

A denominação de ideal primo para  $\beta(R)$ , é também muito utilizada. Esta denominação se justifica pelo fato de que  $\beta(R)$  é a interseção de todos os ideais primos de  $R$  (Teorema 7.11). Note que o radical primo  $\beta(R)$  de  $R$ , também pelo Teorema 7.11, é o menor ideal semiprimo de  $R$ .

Outra denominação utilizada para  $\beta(R)$  é a de radical de Baer.

É claro que, se  $R$  é comutativo,  $\beta(R)$  é o conjunto de todos os elementos nilpotentes de  $R$ .

Lembremos que o anel  $R$  é dito primo (resp. semiprimo) se  $(0)$  é um ideal primo (resp. semiprimo). Um ideal  $I$  de  $R$  é primo (resp. semiprimo) se  $R/I$  é primo (resp. semiprimo). Em anéis comutativos, um anel é primo (resp. semiprimo) se ele é um domínio (resp. reduzido).

**Proposição 7.14** *Seja  $R$  um anel. As seguintes condições são equivalentes:*

- (i)  $R$  é um anel primo;
- (ii)  $\beta(R) = 0$ ;

(iii)  $R$  não possui ideais nilpotentes não nulos;

(iv)  $R$  não possui ideais à esquerda (direita) nilpotentes não nulos.

Prova. Um pouco de atenção mostra que é suficiente provar (i)  $\rightarrow$  (iv).

Seja  $I$  um ideal à esquerda nilpotente do anel semiprimo  $R$ , e seja  $n \geq 1$  mínimo tal que  $I^n = 0$ . Assim, se  $n > 1$ ,  $(I^{n-1})^2 = 0$  e segue que  $I^{n-1} = 0$ . A contradição prova que  $n = 1$ . ■

Uma propriedade fundamental, que todos os radicais devem verificar, é a seguinte (comparar com o Corolário 5.7).

**Proposição 7.15** *Para todo anel  $R$ , o radical primo  $\beta(R/\beta(R))$  de  $R/\beta(R)$  é zero.*

Prova. Segue facilmente do fato de que  $\beta(R)$  é um ideal semiprimo. ■

Neste ponto é bom lembrar alguns exemplos. Um domínio é sempre um anel primo. Um anel reduzido é um anel semiprimo. Um anel simples é um anel primo. Mais ainda, um anel primitivo à esquerda (direita) é um anel primo (Proposição 6.9).

Seja  $R$  um anel  $J$ -semisimples. então  $J(R) = 0$  e segue que  $\beta(R) = 0$ . Assim, todo anel semiprimo é semiprimo.

Um produto direto de anéis semiprimos é semiprimo. Por outra parte, um produto direto de dois ou mais anéis, nunca é um anel primo.

Outro exemplo é dado pela seguinte

**Proposição 7.16** *Um anel  $R$  é primo (resp. semiprimo) se, e somente se,  $M_n(R)$  é primo (resp. semiprimo).*

Prova. Segue facilmente da descrição dos ideais de um anel de matrizes dada no Teorema 4.1. ■

**Corolário 7.17** *Para qualquer anel  $R$ ,  $\beta(M_n(R)) = M_n(\beta(R))$ .*

Vamos agora definir outros nil radicais de  $R$ .

**Lema 7.18** *Seja  $I$  um ideal à esquerda nil e seja  $A$  um nil ideal de  $R$ . Então  $I + A$  é um nil ideal à esquerda de  $R$ .*

Prova. Se  $a \in I + A$ , é fácil ver que  $\bar{a}$  é nilpotente em  $R/A$ . Portanto existe  $n \geq 1$  tal que  $a^n \in I$ . Mas, como  $I$  é nil,  $a$  é nilpotente. ■

O lema acima implica que, em particular, a soma de qualquer família de nil ideais de  $R$  é um nil ideal. De fato, qualquer elemento desta soma pertence a uma soma finita de nil ideais, donde é um elemento nilpotente.

Esta observação leva à seguinte

**Definição 7.19** *O nil radical superior  $Nil(R)$  de um anel  $R$  é definido como sendo a soma de todos os nil ideais de  $R$ .*

O nil radical superior é o maior nil ideal de  $R$  e pode ser definido por

$$\text{Nil}(R) = \{a \in R : (a) \text{ é um nil ideal}\}.$$

**Proposição 7.20** *Para qualquer anel  $R$ ,  $\beta(R) \subseteq \text{Nil}(R) \subseteq J(R)$ . Se  $R$  é comutativo, então  $\beta(R) = \text{Nil}(R)$ . Se  $R$  é artiniano à esquerda (direita), então  $\beta(R) = \text{Nil}(R) = J(R)$ .*

*Prova.* A primeira inclusão segue do fato de que  $\beta(R)$  é um nil ideal; a segunda do fato de que  $\text{Nil}(R)$  é um nil ideal. Se  $R$  é comutativo, ambos os radicais  $\beta(R)$  e  $\text{Nil}(R)$  coincidem com o conjunto de todos os elementos nilpotentes de  $R$ , logo são iguais. Finalmente, se  $R$  é artiniano à esquerda,  $J(R)$  é nilpotente. Assim,  $J(R) \subseteq \beta(R)$  e os três radicais são iguais. ■

**Proposição 7.21** *Para todo anel  $R$ ,  $\text{Nil}(R/\text{Nil}(R)) = 0$ .*

*Prova.* Se  $\bar{I}$  é um nil ideal de  $R/\text{Nil}(R)$ , então  $I = A/\text{Nil}(R)$  para um ideal  $A$  de  $R$ , e para cada  $a \in A$  existe um inteiro  $n \geq 1$  tal que  $a^n \in \text{Nil}(R)$ . Logo  $(a^n)^m = 0$ , para algum  $m \geq 1$ . Assim,  $a$  é nilpotente. Portanto,  $A$  é um nil ideal e segue que  $A \subseteq \text{Nil}(R)$ . Conseqüentemente,  $\bar{I}$  é zero e a prova está completa. ■

Vamos agora definir alguns outros radicais de anéis, mas omitiremos a prova da maioria das afirmações. O leitor interessado pode consultar [1] ou [3], para maiores detalhes.

O radical de Levitzki de um anel  $R$  é definido de maneira semelhante ao nil radical superior, mas utilizando a noção de nilpotência local. Um subconjunto  $S$  de um anel  $R$  diz-se localmente nilpotente se para cada subconjunto finito  $F = \{s_1, s_2, \dots, s_n\} \subseteq S$  existe um inteiro  $N = N(n)$  tal que cada produto de  $N$  elementos de  $F$  é zero. Se  $I$  é um ideal à esquerda (direita) de  $R$ , então vale o seguinte:  $I$  é nilpotente  $\Rightarrow I$  é localmente nilpotente  $\Rightarrow I$  é nil.

Se  $A$  e  $B$  são ideais unilaterais localmente nilpotentes de  $R$ , então  $A + B$  é localmente nilpotente. Adicionalmente notamos que a correspondente propriedade para nil ideais é um problema aberto da Teoria dos Anéis que é muito complicado, conhecido como conjectura de Koethe. Sobre este problema voltaremos na seção seguinte.

Pela observação anterior, a soma de todos os ideais localmente nilpotentes de um anel  $R$  é um ideal localmente nilpotente  $L(R)$ . Este ideal é chamado o radical de Levitzki de  $R$ , e é o maior ideal localmente nilpotente de  $R$ .

O radical  $L(R)$  satisfaz a propriedade antes mencionada para outros radicais:  $L(R/L(R)) = 0$ .

Não é difícil verificar que  $\beta(R) \subseteq L(R) \subseteq \text{Nil}(R) \subseteq J(R)$  e que as inclusões são todas estritas. Ou seja, existem exemplos de anéis para os quais os radicais acima são dois a dois diferentes.

Os radicais estudados até agora são sempre interseções de ideais primos. De fato, isto segue para  $J(R)$  do Corolário 6.5 e da Proposição 6.9, e do Teorema 7.11 e da Definição 7.13 para  $\beta(R)$ .

Para  $L(R)$  e  $Nil(R)$  o mesmo resultado vale. Um anel  $R$  é dito  $L$ -semisimples (resp.  $Nil$ -semisimples) se  $L(R) = 0$  (resp.  $Nil(R) = 0$ ). A prova do seguinte resultado pode ser encontrada em ([3], Teorema 18 e Teorema 51).

**Teorema 7.22** *Seja  $R$  um anel. Então:*

(1)  $Nil(R)$  é igual à interseção de todos os ideais primos  $P$  de  $R$  tais que  $R/P$  é  $Nil$ -semisimples;

(2)  $L(R)$  é igual à interseção de todos os ideais primos  $P$  de  $R$  tais que  $R/P$  é  $L$ -semisimples.

Não pretendemos dar aqui a definição geral de radicais de anéis. Sempre que  $\alpha$  é um radical de anéis, para cada anel  $R$  existe associado um ideal  $\alpha(R)$  de  $R$ , e esta correspondência satisfaz certas propriedades.

Um anel  $R$  é dito  $\alpha$ -semisimples se  $\alpha(R) = 0$ . Da definição de radical temos que, em particular, para todo anel  $R$ ,  $R/\alpha(R)$  é  $\alpha$ -semisimples, isto é,  $\alpha(R/\alpha(R)) = 0$ .

Como vimos até aqui, os radicais  $J$ ,  $\beta$ ,  $Nil$  e  $L$  são interseções de ideais primos. Ou seja, para cada anel  $R$ ,  $\alpha(R)$  é uma interseção de ideais primos de  $R$ , para  $\alpha = J, \beta, Nil, L$ . Existem alguns outros radicais que são bastante populares e que são interseções de ideais primos.

Por exemplo, se  $R$  é um anel,  $U(R)$  é definido como sendo a interseção de todos os ideais maximais de  $R$ . Então  $U$  define um radical na categoria dos anéis, chamado o radical de Brown-McCoy. É fácil ver que  $J(R) \subseteq U(R)$ , para todo  $R$ .

Outro exemplo bastante conhecido é o radical fortemente primo. Um anel  $R$  é dito fortemente primo à direita se todo ideal não nulo  $I$  de  $R$  contém um subconjunto finito  $F$  tal que  $Ann_r(F) = \{a \in R : Fa = 0\} = 0$ . Um ideal  $P$  de um anel  $R$  é dito fortemente primo (à direita) se  $R/P$  é fortemente primo (à direita). É fácil ver que um ideal fortemente primo é primo.

A interseção de todos os ideais fortemente primos (à direita) de  $R$  é chamado o radical fortemente primo  $S_r(R)$  de  $R$ . Análoga definição pode ser feita para o radical fortemente primo à esquerda  $S_l(R)$ . É fato conhecido que  $S_r(R) \neq S_l(R)$ .

O que podemos dizer da estrutura de anéis  $\alpha$ -semisimples, para  $\alpha$  algum radical de  $R$ ? Infelizmente, a estrutura não é muito bem determinada como nos dois casos estudados até agora. O melhor que podemos fazer é reduzir, de certa maneira, a estrutura aos anéis primos  $\alpha$ -semisimples, quando  $\alpha$  é um dos radicais acima. E a descrição somente pode ser feita via produto subdireto, o qual não fornece uma informação muito precisa. Vejamos isto com mais detalhes.

**Definição 7.23** *Sejam  $R$  e  $\{R_i : i \in \Omega\}$  anéis e seja  $j: R \rightarrow \prod_{i \in \Omega} R_i$  um monomorfismo. Dizemos que  $j$  é uma representação de  $R$  como um produto subdireto dos anéis  $R_i$ , se cada homomorfismo  $\varphi_i: R \rightarrow R_i$ , obtido pela composição de  $j$  com as projeções canônicas, é sobrejetor.*

Pela definição, se  $R$  é representado como produto subdireto dos anéis  $R_i$ , como indicado acima, então  $\bigcap_{i \in \Omega} \ker \varphi_i = 0$ . Isto é, existem ideais  $K_i = \ker \varphi_i$  de

$R$  tais que  $R_i \simeq R/K_i$ , para todo  $i$ , e  $\bigcap_{i \in \Omega} K_i = 0$ .

Reciprocamente, suponhamos que  $R$  contém uma família de ideais  $(K_i)_{i \in \Omega}$  tais que  $\bigcap_{i \in \Omega} K_i = 0$ . Então a aplicação natural  $j: R \longrightarrow \prod_{i \in \Omega} R/K_i$  proporcionará uma representação de  $R$  como produto subdireto, onde

$$j(x) = (x + K_i)_{i \in \Omega} \in \prod_{i \in \Omega} R/K_i,$$

para todo  $x \in R$ .

Para qualquer um dos radicais  $\alpha$  definidos acima,  $\alpha(R)$  é igual à interseção de ideais primos  $P$  de  $R$  tais que  $R/P$  é  $\alpha$ -semisimples. Logo para estes radicais temos:

**Proposição 7.24** *Um anel  $R$  é  $\alpha$ -semisimples se, e somente se,  $R$  é um produto subdireto de anéis primos  $\alpha$ -semisimples.*

Prova. Se  $R$  é  $\alpha$ -semisimples, então existem ideais primos  $(P_i)_{i \in \Omega}$  de  $R$  tais que  $R/P_i$  é  $\alpha$ -semisimples, para todo  $i \in \Omega$ , e  $\bigcap_{i \in \Omega} P_i = \alpha(R) = 0$ . Logo a aplicação natural  $j: R \longrightarrow \prod_{i \in \Omega} R/P_i$  é uma representação de  $R$  como produto subdireto do tipo requerido.

Reciprocamente, se  $R \longrightarrow \prod_{i \in \Omega} R_i$  é uma tal representação, então os ideais  $\ker \varphi_i$  são primos e  $R/\ker \varphi_i$  é  $\alpha$ -semisimples, onde  $\varphi_i: R \longrightarrow R_i$  é como antes. De fato,  $R/\ker \varphi_i \simeq R_i$ . Logo,  $\alpha(R) \subseteq \bigcap_{i \in \Omega} \ker \varphi_i = 0$  e assim  $R$  é  $\alpha$ -semisimples. ■

Em particular,

**Corolário 7.25** *Um anel  $R$  é semiprimativo (resp. semiprimo, Nil-semisimples, L-semisimples, U-semisimples,  $S_r$ -semisimples) se, e somente se,  $R$  é produto subdireto de anéis primitivos à esquerda (direita) (resp. anéis primos, anéis primos Nil-semisimples, anéis primos L-semisimples, anéis simples, anéis fortemente primos à direita).*

Esta descrição da estrutura de um anel  $\alpha$ -semisimples tem dois problemas importantes. Primeiro, um produto subdireto não é bem determinado pelos seus fatores diretos. Segundo, a estrutura dos anéis primos  $\alpha$ -semisimples não pode ser descrita, em geral, tão precisamente como nos casos anteriormente estudados.

Existem muitos estudos sobre a estrutura de anéis primos, com condições adicionais (por exemplo, anéis primos sobre os quais existem derivações satisfazendo certas condições, ou com automorfismos, etc.). Mas isto não está dentro dos objetivos do nosso curso.

Uma última observação antes de concluir esta seção. Como já dissemos antes, um anel  $R$  é dito um domínio se para  $a, b \in R$ ,  $ab = 0$  implica  $a = 0$  ou  $b = 0$ . Um ideal  $P$  de  $R$  é dito completamente primo se  $R/P$  é um domínio. É claro que todo ideal completamente primo é primo (mais ainda, ele é fortemente primo à

direita). A interseção  $N_g(R)$  de todos os ideais completamente primos é chamado o nilradical generalizado.

Se  $R$  é comutativo, então todo ideal primo é completamente primo e temos  $\beta(R) = N_g(R)$ . Em geral,  $N_g(R)$  contém  $Nil(R)$ .

Finalmente, temos a seguinte proposição cuja prova pode ser encontrada em ([1], 1.2.7).

**Proposição 7.26:** *Para qualquer anel  $R$ , as seguintes condições são equivalentes:*

- (i)  $R$  é  $N_g$ -semisimples ( $N_g(R) = 0$ );
- (ii)  $R$  é reduzido;
- (iii)  $R$  é produto subdireto de domínios.

## Referências

- [1] **T.Y. Lam** – “*A first course in noncommutative rings*”, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1991
- [2] **J. Lambek** – “*Lectures on rings and modules*”, New York, Chelsea Publishing Company, 1976
- [3] **N.J. Divinsky** – “*Rings and radicals*”, Vancouver, University of Toronto Press, Mathematical Expositions no. 14, 1964