

MATEMÁTICA NA COMPUTAÇÃO – UMA CRÍTICA À VISÃO DOS ALUNOS

Rogério Eduardo da Silva¹, David Daniel e Silva¹ e Gilmário Barbosa dos Santos¹

Resumo — É fato que muitos alunos de computação percebem na matemática um assunto desmotivador devido à, na visão discente, falta de aplicabilidade prática dos conceitos abordados. Dessa forma, este artigo apresenta uma breve descrição de aplicações práticas, desenvolvidas no âmbito do GMAC – Grupo de Matemática Aplicada e Computacional do DCC/UEDESC/Joinville, sobre: (1) Segmentação de imagens utilizando contornos ativos (snakes) por convolução discreta: separar componentes de interesse em uma imagem através de um sistema físico dinâmico que pode prover uma evolução mais eficiente no processo de convolução. (2) Síntese de imagens através da técnica ray-tracing: simulação do princípio ótico da fotografia, para geração de imagens foto-realistas. (3) um mecanismo seguidor de superfícies baseado em modelo matemático fuzzy. Neste sentido, percebe-se que, para o desenvolvimento do raciocínio lógico, fundamental à formação profissional do acadêmico, se faz necessário desenvolver um interesse maior desses alunos pela matemática.

Palavras Chave – Contornos Ativos, Matemática Computacional, Ray-Tracing, Seguidor de Superfícies.

INTRODUÇÃO

Não é raro encontrar alunos de cursos de computação reclamando sobre disciplinas de matemática, tais como cálculo ou álgebra. Normalmente essas disciplinas são citadas como de pouca, ou nenhuma aplicação nesses cursos. Nada mais equivocado. O estudo da matemática nas diversas disciplinas em que esta se apresenta, traz benefícios diretos e indiretos, não apenas para a computação como matéria de estudo, mas também para aqueles que profissionalmente se dedicam à computação. Esses benefícios influenciam positivamente no desenvolvimento do raciocínio lógico ou em forma de teoremas e modelos diretamente aplicados a certas áreas da computação, tais como Computação Gráfica, Simulação Numérica e Dinâmica de Fluidos Computacional.

Uma etapa na solução de problemas é a criação de um modelo que leve à compreensão do contexto do problema, esse modelo passa então a representar o sistema modelado e serve como base para estudos acerca do mesmo. Os modelos são, portanto, interpretações do mundo real, e são obtidos por abstração de alguns aspectos (do sistema real) em detrimento de outros, de forma que o resultado (modelo

propriamente dito) capta apenas a essência do sistema considerado. Além da capacidade de abstração (capacidade de lidar com modelos), a busca pela solução de problemas recorre também ao chamado raciocínio lógico. Sem entrar em meandros filosóficos, raciocinar de forma lógica consiste em pensar de forma objetiva e clara, buscando a solução de um problema através do encadeamento estruturado de argumentos e evidências.

Pode-se dizer que as disciplinas de matemática, na medida em que desenvolvem abstração e lógica, são utilíssimas ao estudo da computação, afinal, resolver um problema através da matemática é essencialmente raciocinar logicamente sobre modelos abstratos, que é exatamente o que se faz para construir e analisar algoritmos.

Ora, se computação é o estudo dos algoritmos [1], então, quaisquer contribuições a esta atividade (construção/análise de algoritmos) são positivas para a computação como matéria. Portanto, conteúdos de disciplinas como álgebra, cálculo e outras, têm um efeito benéfico à computação, pois desenvolvem uma destreza de raciocínio que combinada às técnicas da computação, produzem algoritmos inteligentes, elegantes e eficientes para diversos problemas.

Além disso, existem disciplinas da computação nas quais há a aplicação direta de teoremas e modelos estudados pela matemática. Inicialmente pode-se citar a computação gráfica, onde se aplicam diretamente a álgebra vetorial e a geometria, mas há outros casos como a chamada simulação numérica, dentro do contexto da computação científica.

SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Tradicionalmente os estudos acerca dos fenômenos físicos, entre outros, baseavam-se na solução analítica das equações que modelavam o fenômeno e em testes empíricos, através da recriação, em escala reduzida, das condições reais, sob o ambiente controlado de um laboratório (testes em túneis de vento, por exemplo). Muitas obras da engenharia foram assim concebidas e construídas. Porém, as soluções analíticas em conjunto com os testes experimentais nem sempre são suficientes para o entendimento do fenômeno sob estudo. Isso se deve a duas razões principais que são [2]: (a) o custo/tempo para montar o experimento em laboratório e (b) o fenômeno pode mostrar-se muito complexo para ser reproduzido em laboratório.

¹ Universidade do Estado de Santa Catarina (UEDESC) – Campus Universitário “Prof. Avelino Marcante” s/n, Bom Retiro, Joinville-SC, 89223-100. {rsilva, david, gilmario}@joinville.udesc.br

Com o advento do computador digital surgiu também uma terceira via para o estudo dos fenômenos físicos e de muitos outros fenômenos que até então só podiam ser analisados e entendidos pelas ferramentas teóricas e/ou experimentais, essa nova ferramenta passou a ser chamada de simulação computacional (ou simulação numérica) onde um programa de computador passa a modelar o comportamento de um sistema físico em análise.

Ao contrário do que se possa pensar, a simulação numérica, ao invés de desbancar as técnicas tradicionais, passou a compor um tripé com estas (ver figura 1) [2]. De forma que os resultados da simulação podem ser usados para confirmar dados experimentais, ou servir de guia para novos experimentos em modelo reduzido do ambiente real.

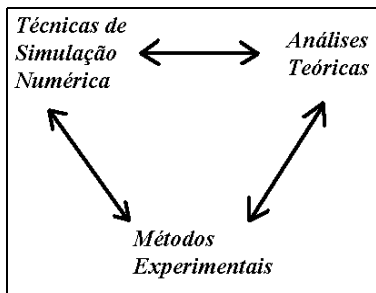


FIGURA 1

ANÁLISES TEÓRICAS E ENSAIOS EXPERIMENTAIS

Pode-se dizer que a simulação numérica ao envolver aspectos da matemática e da computação tem elementos dos quais um estudante pode se beneficiar muito. Desta forma, apresentam-se a seguir, algumas aplicações computacionais, desenvolvidas no âmbito do GMAC – Grupo de Matemática Aplicada e Computacional.

Inicialmente será descrito um sistema de segmentação de imagens que utiliza contornos ativos e em seguida abordaremos aplicações de síntese de imagens com *raytracing* e um mecanismo seguidor de superfícies.

SEGMENTAÇÃO DE IMAGENS GUIADA POR CONTORNOS ATIVOS

O que pode ser mais comum do que utilizar um anel de borracha para prender objetos? Quem nunca manipulou tal anel elástico que ao ser tensionado, ou seja, forçado a aumentar o seu perímetro, tende naturalmente, a diminuí-lo? Pois este é o sistema físico em que se baseia um contorno ativo (ou *Snake*), o qual de fato pode ser um modelo alternativo àquele utilizado para guiar a varredura na convolução, possibilitando uma evolução mais eficiente daquele processo.

Tradicionalmente a segmentação de imagens é feita através da convolução de uma imagem por uma máscara, esta por sua vez “varre” a imagem original, de forma semelhante a um feixe eletrônico varrendo uma tela de

fósforo em um TRC (tubo de raios catódicos), enquanto produz uma imagem resultante segmentada (figura 2).

Com o contorno ativo a máscara de convolução deverá ser guiada pelos *snaxels* (componentes da *snake*), buscando-se dessa forma, uma maior eficiência na varredura das máscaras de convolução, já que a *snake*, ao evoluir, reduz gradualmente a sua área de domínio, reduzindo também o perímetro que sofrerá a convolução (figura 2), nesse caso, a cada posicionamento da *snake*, certas operações devem ocorrer envolvendo os *pixels* da região definida por uma máscara centrada em um *snaxel*.

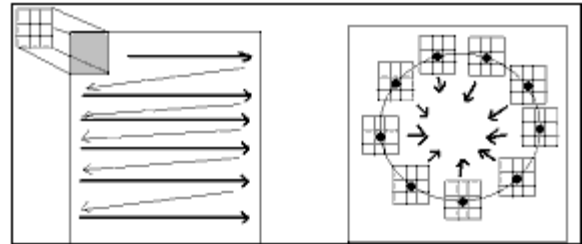


FIGURA 2

(ESQ.) MÁSCARA GUIADA PELO PROCESSO CONVENCIONAL E (DIR.) POR UMA *SNAKE*.

Na figura 3 ilustra-se o que se deseja do modelo físico do anel elástico adaptado. Perceba que a *snake* não apenas diminui seu diâmetro, como faria o anel elástico real, mas também busca adaptar-se ao contorno do objeto.

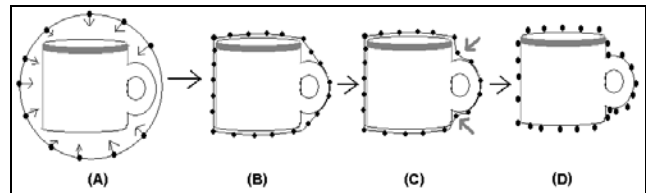


FIGURA 3

CASO IDEAL DE UM CONTORNO ATIVO (*SNAKE*) EM AÇÃO.

Na terminologia matemática a expressão que descreve a energia da *snake* é dita um funcional de energia, ou seja uma função que depende de outra função, mas não no sentido simples/convencional de função composta, pois aqui a relação funcional é de uma função que depende de derivadas de outra função. Segue abaixo o funcional que descreve as componentes de energia envolvidas [3]:

$$(1) \quad E_{total} = \int_0^1 E_{interna}(V(s)) + E_{externa}(V(s)) \therefore \\ E_{total} = E_{interna} + E_{externa}$$

Em (1): $E_{interna}$ representa os componentes de energia que dependem das propriedades intrínsecas da *snake* em cada um ponto do contorno.

$$(2) \quad E_{interna} = (\alpha |Vs(s)|^2 + \beta |Vss(s)|^2) / 2 \therefore \\ E_{interna} = E_{elástica} + E_{curvatura}$$

Onde entende-se $V_s(s)$ como a primeira derivada da função $V(s)$ em relação a s (comprimento de arco) e $V_{ss}(s)$ como a segunda derivada. Portanto, cada ponto $((x(s),y(s)))$ do contorno possui uma velocidade V_s e aceleração V_{ss} . Isso pode ser interpretado da seguinte forma: há uma componente elástica ($E_{elástica}$) que introduz uma tensão que faz o contorno se comportar como o anel elástico, a outra componente é energia de curvatura $E_{curvatura}$, que permite que a *snake* se curve para melhor adaptar-se ao contorno do objeto a ser segmentado (vide figura 4).

A componente $E_{externa}$ por sua vez poderia ser chamada de E_{imagem} e representa as forças decorrentes de características intrínsecas à imagem propriamente dita. Particularmente, no trabalho aqui descrito, utilizou-se a média de *pixels* (tons de cinza) em uma determinada vizinhança, como a componente E_{imagem} à guisa de fazer a *snake* buscar regiões escuras na imagem.

Para fins de experimentação foi desenvolvido um protótipo de simulador baseado no modelo das *snakes* discutido acima, que segmenta imagens em tons de cinza. Em termos de programação foram utilizadas as seguintes aproximações para as componentes descritas em (1) e (2) [4]:

$$(3) E_{elástica} = |V_s(s)|^2 \approx (x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2$$

$$(4) E_{curvatura} = |V_{ss}(s)|^2 \approx (x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1})^2 + (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1})^2$$

Em termos de código foi utilizado basicamente o C++ e o modelo de programação chamado “programação dinâmica”. Na figura 3 abaixo segue exemplo de execução.

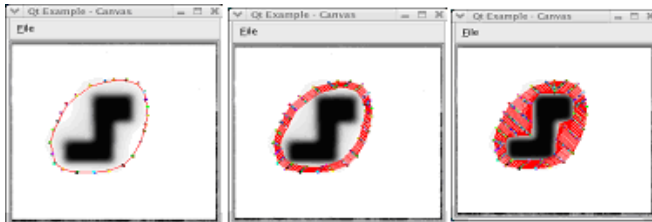


FIGURA 4

PROTÓTIPO: (A) SNAKE INICIALIZADA – CONTOURO EM VERMELHO, (B) PROCESSO EM EVOLUÇÃO, (C) ESTÁGIO FINAL – FIGURA SEGMENTADA

Maiores detalhes sobre contorno ativo ver [5].

RAY-TRACING

Outra aplicação que faz uso de conceitos da matemática, geometria analítica e simulação numérica é uma técnica de síntese de imagens foto-realistas chamada *Ray-Tracing* (ou Traçado de Raios) [6].

Entende-se por síntese de imagens o processo de se criar imagens por computador a partir de modelos matemáticos (equações, p.ex.).

O algoritmo *ray-tracing* simula a interação da luz em ambientes 3D para gerar imagens através do princípio ótico

da fotografia. Este processo não é uma tarefa trivial devido a seu alto custo computacional. Desta forma, diversas aproximações matemáticas se fazem necessárias:

1. Os raios de luz são representados como vetores, monocromáticos, sem dissipação de energia.
2. A câmera virtual consiste de um ponto de observação e um plano de projeção (imagem resultante).
3. Os objetos são representações abstratas como equações ou poligonalizações de superfícies.

O processo de simulação consiste no disparo de raios que partem do observador, passam por cada ponto do plano de projeção e incidem sobre os objetos da cena. Para cada intersecção detectada em algum objeto, um modelo de iluminação é calculado para se determinar a cor do ponto. A figura 5 ilustra este processo.

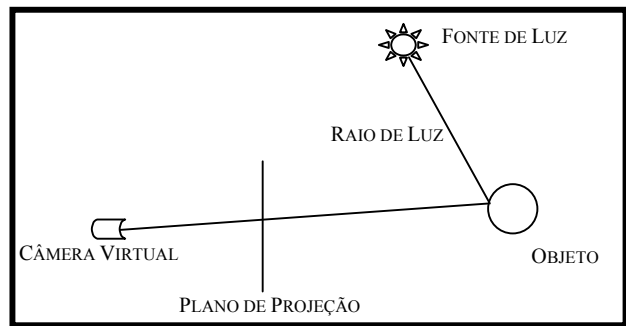


FIGURA 5

ALGORITMO RAYTRACING

Além disso, outros raios de luz podem ser disparados na cena para a composição de reflexões e refrações da luz. O cálculo para a reflexão é feito segundo as leis da física, que diz que o raio incidente, o raio refletido e o vetor normal à superfície são coplanares e que o ângulo de incidência desse raio com a superfície é o mesmo ângulo de reflexão. Para a refração, os raios de luz respeitam a Lei de Snell ($\sin(\alpha)/\sin(\beta) = \eta_\alpha/\eta_\beta$) que diz que um raio transmitido muda de direção ao passar para um meio físico diferente.

Um modelo de iluminação simula o fenômeno de propagação da energia luminosa em um ambiente, a fim de determinar a quantidade de luz incidente sobre um ponto de uma superfície.

Como uma simplificação matemática, três componentes de iluminação são calculados: a reflexão difusa (ou lambertiana) determina a quantidade de luz incidente (cor) sobre a superfície. A reflexão especular determina a quantidade de luz refletida (brilho) e a reflexão de ambiente consiste de uma aproximação para o cálculo da luz indireta.

A equação (5) apresenta o cálculo de um modelo de iluminação global (M_{IG}).

$$(5) M_{IG} = I_L \cdot (K_D \cdot \cos(\alpha) + K_S \cdot \cos^N(\theta) + K_A) + I_M \cdot K_M + I_T \cdot K_T$$

onde: I_L representa a intensidade de luz do ambiente, I_M a intensidade de luz refletida, I_T a intensidade de luz transmitida, K_D o índice de reflexão difusa, K_S é o índice de

reflexão especular, K_A a quantidade de iluminação indireta, N é coeficiente de concentração especular, K_M representa a quantidade de luz proveniente de reflexões e K_T a quantidade de luz transmitida.

Desta forma, foi desenvolvida uma ferramenta (protótipo) [7] que implementasse síntese de imagens através de *ray-tracing*. A figura 6 apresenta um exemplo de imagem gerada pela ferramenta.

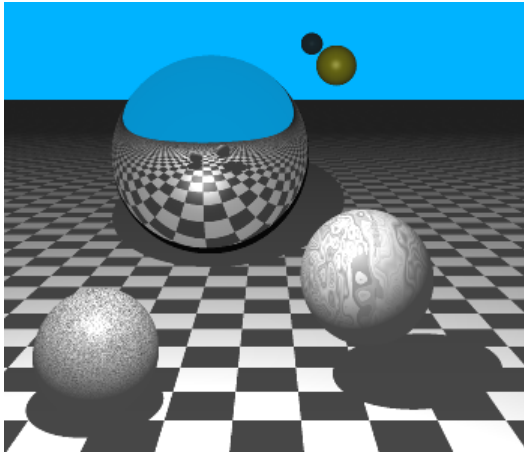


FIGURA 6

EXEMPLO DE IMAGEM GERADA A PARTIR DA TÉCNICA *RAYTRACING*

A ferramenta é composta por dois módulos principais: compilador e renderizador. O módulo compilador é responsável por interpretar um arquivo de descrição da cena a ser renderizada e o módulo renderizador executa o algoritmo *ray-tracing*. Como resultado, uma imagem com qualidade próxima a de fotografias (16 milhões de cores) é gerada.

O processo de síntese, dependendo da complexidade da cena, pode levar de alguns segundos a várias horas de processamento.

UM MECANISMO SEGUIDOR DE SUPERFÍCIES BASEADO EM UM MODELO MATEMÁTICO FUZZY

É necessário expressar, no contexto deste artigo, que com o uso da matemática muita facilidade é obtida na modelagem de processos. Entretanto, o modelo matemático, o modelo experimental e a simulação computacional, quando aplicados em conjunto para a solução de problemas de engenharia, entre outros, se torna fundamental e de altíssimo valor para o projeto, construção e funcionamento do sistema.

Desta forma, os alunos que conseguirem entender que a matemática é uma das ferramentas mais valiosas para o modelo prático e também para a simulação computacional, poderão fazer projetos de altíssimo nível, e com certeza, não irão pensar que as disciplinas de matemática não são tão úteis – passarão a pensar o contrário.

Um exemplo que segue estes aspectos, nas bases da modelagem matemática (usando a lógica fuzzy), com um protótipo para verificar seu funcionamento (modelo experimental), auxiliado pelo computador, numa verdadeira obra de engenharia mecatrônica é o mecanismo seguidor de superfícies apresentado na figura 7 [8].

Pode-se observar que o sistema do seguidor de superfície é dividido em três módulos: (a) controlador de movimento nas direções x-y (mesa com barra seguidora); (b) sistema computacional (computador com periféricos e programas); (c) modelo matemático.



FIGURA 7

PROTÓTIPO DO MECANISMO SEGUIDOR DE SUPERFÍCIES (MODELO EXPERIMENTAL)

O controlador de movimento nas direções x-y foi construído com o uso de uma mesa (plotter) com liberdade de movimentos em três dimensões ou eixos (x-y-z) construída com motores de passo que, por sua vez, são controlados por uma interface máquina-computador usando a RS232. Junto ao eixo z, foi acoplado uma barra seguidora que gira, em uma faixa angular, em conjunto com um potenciômetro de carvão. A barra seguidora faz o contato com a peça que é colocada a uma posição qualquer a frente da mesma em cima da mesa (plataforma x-y-z).

O sistema computacional foi constituído pelo computador, uma placa (FuzzyLab), adquirida na Alemanha, com o processador dedicado para lógica fuzzy FC110, drivers e o programa controlador e de comunicação com a placa mc-Fuzzylab, que já veio com um conversor A/D e D/A para processamento de dados externos para a sua base de conhecimento (RAM ou EPROM) ou da sua base de conhecimento para o meio externo.

O modelo matemático utilizado, constituiu-se das regras fuzzy de cálculo de pesos e da determinação do centro geométrico de áreas. A figura 8 mostra um exemplo de cálculo do centro geométrico de uma área formada por três trapézios usada no projeto.

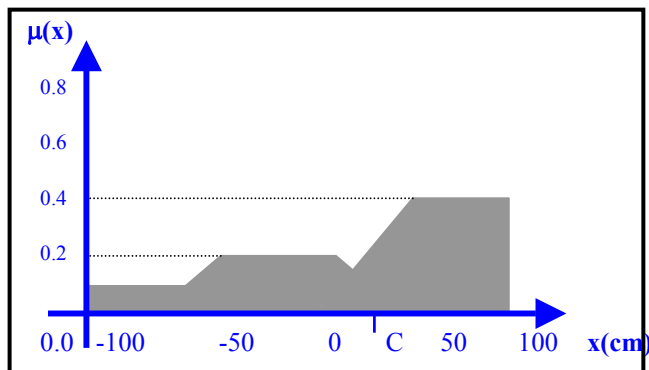


FIGURA 8

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO MODELO MATEMÁTICO: C É O CENTRO GEOMÉTRICO DA ÁREA TOTAL DOS TRAPÉZIOS

Para determinar o ponto centróide C resultante das três áreas trapezoidais acima, usa-se uma série de passos como segue:

- Primeiramente um ponto centróide no eixo x é determinado para cada área trapezoidal, também chamadas de funções de pertinência.
- As funções de pertinência são limitadas na altura pela intensidade da regra aplicada (regras fuzzy) no formato IF-THEN, e as áreas das funções de pertinência são computadas.
- Calcula-se a área formada pela limitação das alturas com as respectivas funções de pertinência.
- No final, C é determinado pela média por pesos dos pontos centróides do eixo x, das áreas computadas, conforme equação (6).

$$(6) \quad C = \frac{A_1 C_1 + A_2 C_2 + A_3 C_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

Mais detalhes sobre o mecanismo seguidor de superfícies podem ser encontrados em [8].

CONCLUSÕES

Em diversas situações na área da ciência da computação pode-se observar a importância da matemática. Este artigo mostra com clareza que é preciso fazer justiça com esta importância.

Não foi por acaso que os matemáticos Von Neumann dos EUA e Turing da Inglaterra, foram os verdadeiros pais da computação moderna. A computação de processos, e as tentativas de torná-la tão confiável quanto possível, requer uso de matemática. A programação expressa algoritmos mais precisos e de uma forma mais adequada, baseado no conhecimento e uso da lógica e da matemática.

Das aplicações apresentadas (entre outras), pode-se dizer que o uso da matemática facilita a modelagem de processos. Entretanto, o modelo matemático, o modelo experimental e a simulação computacional, quando

aplicados em conjunto para a solução de problemas de engenharia, entre outros, se torna fundamental e de altíssimo valor para o projeto, construção e funcionamento de um sistema.

Desta forma, os alunos que conseguirem entender que a matemática é uma das ferramentas mais valiosas para o modelo prático e também para a simulação computacional, poderão fazer projetos de altíssimo nível, e com certeza, não irão pensar que as disciplinas de matemática não são tão úteis.

Para despertar o interesse dos acadêmicos sobre a importância da matemática na construção e desenvolvimento do raciocínio lógico, é essencial que os docentes dos cursos de computação, desde a primeira fase, mostrem sua aplicabilidade através de exemplo práticos. Sugere-se ainda, a criação de grupos de estudo e/ou pesquisas em áreas relacionadas à matemática computacional, incentivando a publicações em eventos científicos. Como por exemplo, o projeto GMAC – Grupo de Matemática Aplicada e Computacional criado no DCC/UDESC/Joinville para fomentar projetos na área.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Knuth, Donald E. "Selected Papers on Computer Science", CLSI Publications, 1996.
- [2] Fortuna, Armando de O. "Técnicas Computacionais para Dinâmica de Fluidos – Conceitos Básicos e Aplicações", Edusp, 2000.
- [3] Kass, M. et al. "Snakes: Active Contours Models" International Journal of Computer Vision. p 321-331, 1988
- [4] Williams, D. et al. "A Fast Algorithm for Active Contours and Curvature estimation", CVGIP:Image Understanding. P 14-26, 1992
- [5] Santos Gilmar B. dos e Góis, Tadeu R.B. "Contorno Ativo como Guia para Convolução Discreta", Anais do Congresso Regional de Iniciação Científica e Tecnológica em Engenharia – CRICTE2003, Itajaí-SC, 2003.
- [6] Glassner, Andrews G., "An Introduction to Ray-Tracing", Academic Press, 1997.
- [7] Silva, Rogério E. "Gênesis – Uma Ferramenta para Síntese de Imagens usando Ray-Tracing", Anais do III Congresso Brasileiro de Computação – CBCOMP2003, Itajaí – SC, 2003.
- [8] Silva, David Daniel e; Czeslau L. Barczack. "A Fuzzy Controller for a Surface Follower Mechanism Results and Applications", 2^o International Conference on Engineering Design and Automation - Maui, Hawaii, USA, August of 1998.