



MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS EXATAS

Aplicações de programação linear e o uso do *software* LINDO

Profª. Márcia Jussara Hepp Rehfeldt

e-mail: mrehfeld@univates.br

1. PROBLEMA DE PRODUÇÃO

Um fabricante de jóias produz brincos e colares. Ele tem um lucro de R\$ 6500,00 em cada par de brincos e R\$ 8000,00 em cada colar vendido. Supõe-se que devido à forte demanda desses itens consegue-se vender toda a produção da fábrica. Mas, a produção da firma é limitada em dois aspectos: em cada par de brincos utilizam-se 5 unidades de ouro. Da mesma forma, cada colar produzido utiliza 20 unidades de ouro. Dispomos um total de 400 unidades de ouro. Cada par de brincos produzido gasta 10 homens-hora e cada colar gasta 15 homens-hora. Dispomos de um total de 450 homens-hora. O objetivo do fabricante é descobrir qual a quantidade de pares de brincos e colares a serem fabricados, de tal modo que o lucro total seja o maior possível.

2. O PROBLEMA DA GRANJA

Segundo a Embrapa, em uma granja de ciclo completo a fase crescimento/terminação de suínos representa em média 65% do total da ração consumida. Com esta análise vê-se a importância no correto balanceamento dos nutrientes da ração para que esta tenha um custo mínimo.

Assim, com o objetivo de auxiliar na tomada de decisões, pretende-se analisar qual é o menor custo para formulação da ração (de 100 Kg) atendendo-se os níveis nutricionais exigidos para o ciclo de produção conforme quadro abaixo.

	Proteína Bruta	Extrato Etéreo	Fibra Bruta	Material Mineral	Cálcio	Fósforo	Preço/KG
Milho	0.0811	0.0402	0.0213	0.0112	0.0003	0.0022	0,29
Farelo de Trigo	0.1561	0.0371	0.0912	0.0510	0.0016	0.0128	0,32
Farelo de Soja	0.4548	0.0237	0.0567	0.0601	0.0028	0,0058	0,57

Farelo de Arroz	0.1171	0.1763	0.1104	0.0809	0.0009	0.0157	0,28
Exigência Mín.	14 %	2,5 %	3,5 %	3,5 %	0,10 %	0,40 %	
Exigência Máx.	18 %	5 %	7 %	10 %	1,05 %	0,60 %	

Atualmente, para fabricar 100Kg de ração, a granja segue as orientações dos técnicos que prestam assessoria, respeitando a formulação a seguir:

Milho – 69Kg.

Farelo de trigo – 3Kg.

Farelo de soja – 18Kg.

Farelo de arroz – 10Kg.

Pergunta-se:

- Qual é o custo mínimo da ração que segue as orientações da EMBRAPA?
- Qual o custo da ração sugerida pelos técnicos ao suinocultor?
- Se o custo é menor, as orientações estão sendo cumpridas? Que implicações isso poderá trazer ao produtor?

3. PROBLEMAS DE PRODUÇÃO

A LCL Motores, uma fábrica de motores especiais, recebeu recentemente pedidos de seus três tipos de motores. Cada motor necessita de um determinado número de horas de trabalho no setor de montagem e de acabamento. A LCL pode terceirizar parte da sua produção. A tabela a seguir resume estes dados.

Modelo	1	2	3	Total
Demanda mínima	3000 unid	2500 unid	500 unid	6000unid
Montagem	1h/unid	2h/unid	0,5h/unid	6000h
Acabamento	2,5h/unid	1h/unid	4h/unid	10000h
Custo produção	R\$ 50,00	R\$ 90,00	R\$ 120,00	
Terceirizado	R\$ 65,00	R\$ 92,00	R\$ 140,00	

A LCL Motores deseja determinar quantos motores devem ser produzidos em sua fábrica e quantos devem ser produzidos de forma terceirizada para atender à demanda de pedidos a um custo mínimo.

4. PROBLEMAS DE TRANSPORTE

Em uma mineradora deseja-se minimizar a utilização de caminhões (minimização da distância) que efetuam o transporte de estéril entre as lavras (de onde se retira o estéril) e os depósitos de estéril (onde se armazena o estéril). A tabela abaixo fornece as distâncias envolvidas (valores em metros) de cada frente de lavra até os dois depósitos:

Origem (Frente da lavra)	Destino (Depósito de estéril)	
	Depósito 1	Depósito 2
A	300	400
B	600	700
C	800	300

As necessidades de transporte das frentes-de-lavra para a próxima semana são (valores em toneladas):

Origem (Frente da lavra)	Necessidades de transporte	
	Mínimo	Máximo
A	20.000	40.000
B	40.000	60.000
C	45.000	60.000

A capacidade máxima de recebimento dos depósitos 1 e 2 são, respectivamente, 50.000 e 60.000 toneladas. Sabendo-se que cada viagem de caminhão transporta 100 toneladas, pede-se o esquema de transporte que minimiza a distância total percorrida.

5. PROBLEMA DE INVESTIMENTOS

A MVN investimentos gerencia recursos de terceiros através da escolha de carteira de investimentos para diversos clientes, baseados em *bonds* de diversas empresas. Um de seus clientes exige que:

- não mais de 25% do total aplicado deve ser investido em um único investimento;
- um valor igual ou superior a 50% do total aplicado deve ser investido em títulos de maturidade maiores de 10 anos;
- o total aplicado em títulos de alto risco ou muito alto deve ser, no máximo, 50% do total investido.

A tabela a seguir mostra os dados dos títulos selecionados.

	Retorno Anual	Anos para vencimento	Risco
Título 1	8,7%	15	Muito baixo
Título 2	9,5%	12	Regular
Título 3	12%	8	Alto
Título 4	9%	7	Baixo
Título 5	13%	11	Alto
Título 6	20%	5	Muito alto

Determine qual percentual do total deve ser aplicado em cada tipo de título.

6. PROBLEMA DE DECISÃO DAS COMPRAS

A organização não-governamental Criança Renascer está organizando uma festa dos aniversariantes do mês. Para isto, ela começa a pesquisar o preço de doces e salgados em cinco diferentes bufês da cidade. Como a festa será realizada com o dinheiro de doações, ela deseja ter os menores custos possíveis. Dado o quadro abaixo que relaciona os custos de cada item por empresa (em reais), bem como as quantidades requeridas para a festa (demanda) e as capacidades de produção de cada empresa, determine quantos doces e salgados a organização deve encomendar em cada empresa (E).

	Ouriço	Cajuzi- nho	Brigadeiro	Bolinha de queijo	Risole	croquete	Coxinha de galinha	Oferta máxima
E 1	0,80	0,70	0,65	0,80	0,83	0,80	0,83	25.000
E2	0,75	0,70	0,67	0,60	0,60	0,60	0,60	23.000
E3	0,45	0,40	0,40	0,27	0,30	0,27	0,30	15.000
E4	0,50	0,45	0,45	0,40	0,40	0,40	0,45	22.000
E5	0,60	0,55	0,50	0,55	0,55	0,55	0,60	20.000
Demanda	5.000	4.000	7.000	5.000	4.000	3.500	6.000	

7. PROBLEMAS DE DESIGNAÇÃO DE PESSOAS

First, each of your workers receives \$300 per week for a regular schedule, with \$25 extra for Saturday work and \$35 extra for Sunday work. Each worker can work only five days a week, and must have two consecutive days off. Second, you have minimum staffing needs which must be met. In table form, that requirement looks like this:

DAY	M	T	W	Th	F	S	Su
-----	---	---	---	----	---	---	----

REQ 20	13	10	12	16	18	20
--------	----	----	----	----	----	----

Under the restrictions outlined above, the following schedules are available, with varying weekly pay rates (where the symbol (n) denotes a day worked):

Schedule Start Day	Mon	Tue	Wed	Thu	Fri	Sat	Sun	Weekly Pay \$
Mon	n	n	n	n	n			300
Tue		n	n	n	n	n		325
Wed		n	n	n	n	n	360	
Thu	n			n	n	n	n	360
Fri	n	n			n	n	n	360
Sat	n	n	n			n	n	360
Sun	n	n	n	n			n	335

Pergunta-se: como é possível atender à escala solicitada a um custo mínimo?

ENCERRANDO...

Pesquisa operacional é...

Ou isto ou aquilo	
<p>Ou se tem chuva e não se tem sol, ou se tem sol e não se tem chuva!</p> <p>Ou se calça a luva e não se põe o anel, ou se põe o anel e não se calça a luva!</p> <p>Quem sobe nos ares não fica no chão, quem fica no chão não sobe nos ares.</p> <p>É uma grande pena que não se possa estar ao mesmo tempo nos dois lugares!</p> <p>Ou guardo o dinheiro e não compro o doce, ou compro o doce e gasto o dinheiro.</p>	<p>Ou isto ou aquilo: ou isto ou aquilo... e vivo escolhendo o dia inteiro!</p> <p>Não sei se brinco, não sei se estudo, se saio correndo ou fico tranqüilo.</p> <p>Mas não consegui entender ainda qual é melhor: se é isto ou aquilo.</p> <p style="text-align: right;">Cecília Meireles</p>

Apêndice

a) Análise de sensibilidade

Para Goldbarg (2000), a análise de sensibilidade é uma técnica para avaliar os impactos que o programa sofre quando existem modificações nas condições de modelagem. A análise de sensibilidade pode ser definida como o estudo de um modelo de programação matemática submetido a mudanças em suas condições iniciais. As mudanças poderão abranger:

- Mudança no vetor de custos;
- Mudança no vetor de termos independentes;
- Mudança nos coeficientes das variáveis;
- Acréscimo de restrições;
- Acréscimo de novas variáveis.

Consideraremos um exemplo:

Uma empresa fabrica dois tipos de produto: rádio standard e rádio luxo. Com relação ao rádio standard temos as seguintes informações:

- A linha de produção comporta um máximo de 24 pessoas;
- Cada rádio consome 1 homem/dia para ser produzido;
- Cada rádio fornece um lucro de R\$ 30,00.

Com relação ao rádio luxo:

- A linha de produção comporta um máximo de 32 pessoas;
- Cada rádio consome 2 homens/dia para ser produzido;
- Cada rádio fornece um lucro de R\$ 40,00.

A fábrica possui 40 empregados a serem alocados nas duas linhas de produção. O objetivo é maximizar o lucro. Que quantidade de produção de rádios maximiza o lucro?

Solução:

$$\text{Maximizar } L = 30x + 40y$$

Sujeito a

$$x \leq 24$$

$$y \leq 16$$

$$x + 2y \leq 40$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

Ao utilizar o LINDO, obteremos os seguintes resultados:

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 1: **Significa que o algoritmo simplex utilizado pelo programa encontrou a solução ótima no primeiro passo (vértice).**

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

- 1) 1040.000 : **Indica o valor ótimo encontrado para a função objetivo**

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X	24.000000	0.000000
Y	8.000000	0.000000

Aqui aparecem os valores ótimos para as variáveis, ou seja, $x=24$ e $y=8$.

Quanto à coluna Reduced Cost, ela pode ter duas interpretações:

- podemos interpretar o custo Reduzido de uma variável como a quantidade pela qual o coeficiente de função objetivo da variável deveria ser aumentado de modo que sua solução seja diferente de zero. Portanto, todas as variáveis cujas soluções já são diferentes de zero possuem um valor zero para o Custo Reduzido. (É o caso do exemplo).
- O Custo Reduzido também pode ser a penalidade que se deve pagar (redução no lucro) para introduzir uma unidade daquela variável na solução.

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	10.000000
3)	8.000000	0.000000
4)	0.000000	20.000000

NO. ITERATIONS= 1

Slack: folga. Significa que se atingiu o limite da restrição.

Dual Price: Representa o aumento na função objetivo se se aumentar de 1 o limite da restrição. Portanto, se a restrição $x \leq 24$ for aumentada para $x \leq 25$, teremos uma nova solução, na qual o lucro será aumentado de R\$ 10,00.

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

Faixas de valores para os quais a base fica inalterada. Vamos observar os coeficientes das variáveis na função objetivo e os limites das restrições.

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X	30.000000	INFINITY	10.000000
Y	40.000000	20.000000	40.000000

Consideramos a linha x, cujo coeficiente é R\$ 30,00. Este coeficiente pode variar entre 30 – 10 e infinito mantendo a mesma solução (x=24 e y=8). Para os casos de y, os limites estão entre R\$ 0 e R\$ 60,00.

RIGHTHAND SIDE RANGES			
ROW	CURRENT	ALLOWABLE	ALLOWABLE
	RHS	INCREASE	DECREASE
2	24.000000	16.000000	16.000000
3	16.000000	INFINITY	8.000000
4	40.000000	16.000000	16.000000

Aqui aparecem os limites das restrições. Exemplo. Na linha 4 ($x+2y \leq 40$)

- Current RHS = 40;
- Allowable Increase = 16 (Significa que podemos aumentar o limite em $40+16 = 56$);
- Allowable Decrease = 16 (Significa que podemos diminuir o limite em $40 - 16 = 24$)

Resumo da situação

Restrição e limite	Aumento de 1 no limite		Diminuição de 1 no limite	
	Aumento no lucro	Validade	Diminuição no lucro	Validade
$X \leq 24$	10	$X=40$	10	$X=8$
$Y \leq 16$	0	$Y= \text{infinito}$	0	$Y=8$
$X+2y \leq 40$	20	$X+2y=56$	20	$X+2y=24$

b) Tipos de solução

Ao tentarmos executar um modelo de PL, podemos deparar com uma das situações abaixo:

- Problema solúvel
- Problema mal definido (*unbounded*)
- Problema não-solúvel (*infeasible*)

O caso solúvel é o desejado. Caso ocorra qualquer um dos outros casos, deve-se verificar o problema, que pode ser no conjunto de restrições.

c) Tipos de variáveis

- Inteiras – ao final do modelo matemático escrever *gin* (*general integer* ou variável inteira geral). Por exemplo, se o modelo matemático tiver 4 variáveis inteiras, escreve-se *gin 4*.
- Inteiras tipo 0/1 – idem anterior. Também pode-se usar *Int 3*, caso tenhamos 3 variáveis inteiras, ou ainda *Int A*, *Int B* e *Int C*. (PRADO, 1999)

Referências bibliográficas

- ARENALES, Marcos et al. Pesquisa Operacional. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.
- GOLDBARG, Marco Cesar. Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos. Rio de Janeiro: Campus, 2000.
- LACHTERMACHER, Gerson. Pesquisa Operacional na tomada de decisões. Rio de Janeiro: Campus, 2007.
- LOESCH, Cláudio; HEIN, Nelson. Pesquisa operacional: fundamentos e modelos. Blumenau: Ed. da FURB, 1999.
- PIDD, M. Modelagem empresarial: ferramentas para tomada de decisão. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.
- PRADO, Darci Santos do. Programação linear. Minas Gerais: Editora de Desenvolvimento Regional, 1999.
- WAGNER, Harvey. Pesquisa Operacional. Rio de Janeiro: PHB, 1986.