

**Uma Aplicação de Quatérnios
no Controle de Movimentos
de 3D-Rotações de um Robô
Braço Mecânico Articulado
como Ferramenta de Ensino
na Graduação**

Claus Haetinger e Marcelo Malheiros

Centro Universitário UNIVATES-RS

GCETE – Bertioga/Santos, 13 a 16 de Março de 2005

Resumo

Os quatérnios têm contribuído para pesquisas em computação gráfica e robótica por poderem ser usados no controle de rotações em 3D.

Utilizamos um robô do tipo braço mecânico, construído a partir de materiais de baixo custo, como apoio ao ensino-aprendizado de Matemática na graduação.

Mostraremos uma representação não-usual dos quatérnios, simplificando as fórmulas do sistema de controle para os modelos cinemáticos direto e inverso do braço mecânico.

Esta modelagem comprovou ser simples, propiciando ao aluno uma aprendizagem mais dinâmica e prática dos conceitos desenvolvidos em Álgebra Linear e Geometria Analítica, Métodos Numéricos, Computação Gráfica e Linguagens de Programação.

1. Motivação

A automação é cada vez mais presente nas indústrias do Vale do Taquari-RS.

Os cursos da UNIVATES capacitam pessoas a trabalhar nestas indústrias.

Os resultados desta pesquisa servirão como subsídio para futuros trabalhos e projetos na área de robótica, visando sua aplicação no setor industrial da região.

Um dos desafios do educador é tornar o processo ensino-aprendizagem mais significativo.

O mundo fora da sala de aula é muito mais atrativo para o aluno do que as atividades que ele realiza dentro dela, o que tem reduzido seu interesse pelo estudo, impelindo o professor a procurar novas estratégias para inovar suas aulas.

Para preencher esta lacuna, foram construídos dois robôs no desenvolvimento de uma pesquisa que contou com bolsistas BIC.

Os robôs foram totalmente projetados e construídos na UNIVATES, desde a parte mecânica e eletrônica até o *software*, usando motores de c.c. da linha automotiva (ferro-velho):

- motor para giro do pulso: de uma impressora antiga;
- estrutura: em madeira (bolsistas) com equipamentos disponíveis na instituição;
- engrenagens: em tecnil (tornearia local);
- eixos das juntas: cubos de bicicleta;
- placas controladoras: componentes eletrônicos reciclados (UNIVATES).

Os motores de corrente contínua facilitam uma determinação mais precisa de posições do que os motores de passo, enquanto que os motores de campo magnético constante (ímã permanente) permitem um torque e uma velocidade relativamente lineares, facilitando a modelagem.

O robô é alimentado com apenas uma tensão fixa de 12 V, de modo que não é possível alterar a sua velocidade no momento.

Descrevemos uma aplicação a ser desenvolvida em diversas disciplinas nos cursos de Engenharia de Computação, Engenharia de Produção e Engenharia de Controle e Automação da UNIVATES.

Cada robô do tipo braço mecânico possui:

- uma *base* fixa;
- um *suporte vertical* giratório;
- um *braço superior*;
- um *antebraço*;
- um *pulso* giratório;
- uma *garra* magnética em sua extremidade.

São, portanto, 4 graus de liberdade.

As *juntas* de revolução do antebraço e do braço são coplanares.

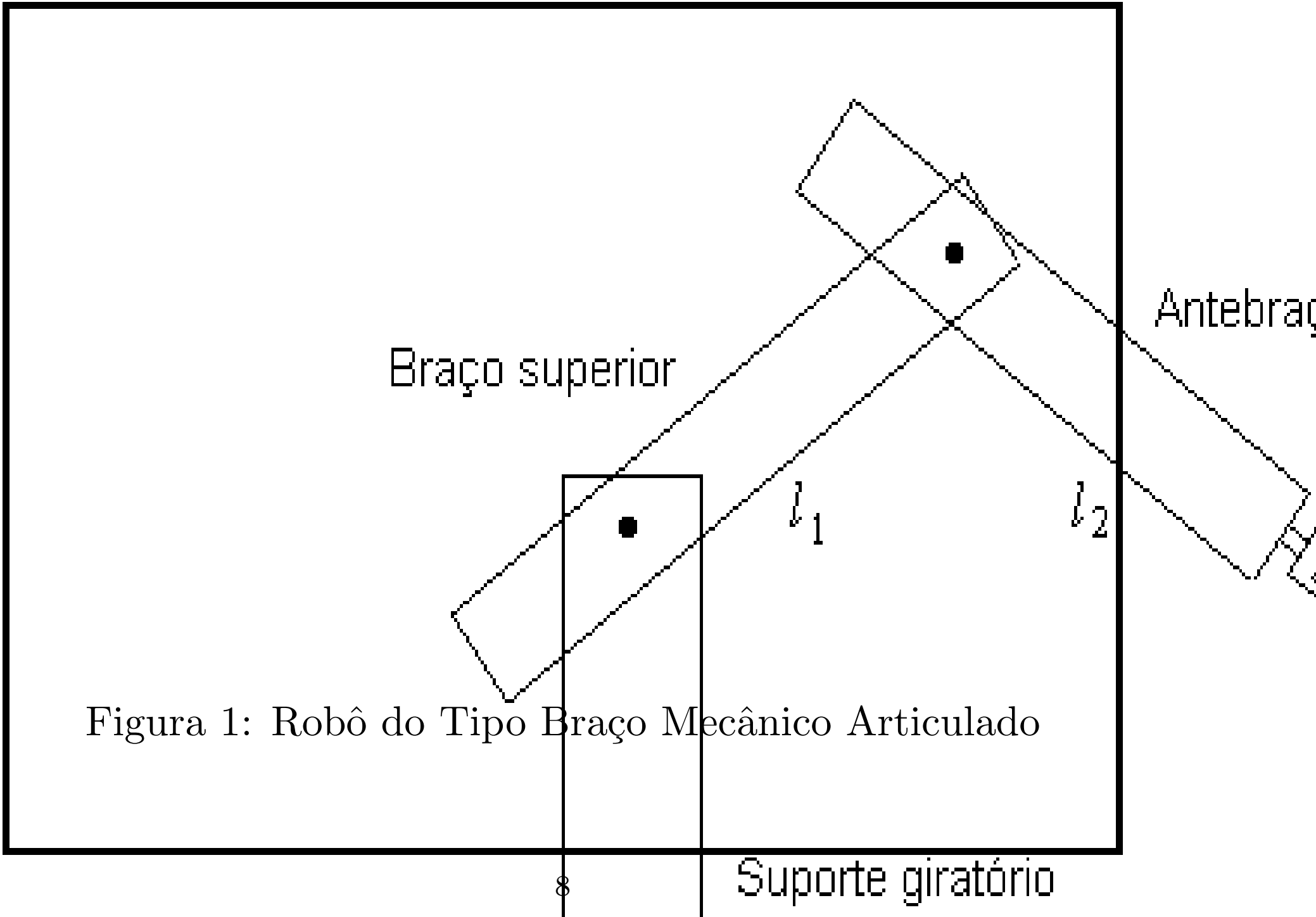


Figura 1: Robô do Tipo Braço Mecânico Articulado

2 O Anel \mathbb{H} dos Quatérnios

W.R. Hamilton (1805-1865) fundamentou os complexos como pares ordenados de reais.

Desenvolveu uma álgebra que permitia trabalhar com vetores no plano, para poder resolver a questão de criar uma álgebra para 3-uplas que permitissem trabalhar com vetores 3D, em dinâmica.

A grosso modo, quatérnios são uma extensão de \mathbb{C} . Ao invés de apenas i , temos três diferentes números tais que $i = j = k = \sqrt{-1}$.

O sistema numérico de quatérnios é importante em pelo menos dois contextos:

No desenvolvimento da álgebra – mostrou que as leis fundamentais sugeridas pelos sistemas conhecidos até 1843 não eram algo a ser aceito sempre, *a priori*.

O conjunto \mathbb{H} foi o primeiro exemplo conhecido onde a ordem dos fatores altera o produto, i.e., a primeira álgebra não-comutativa, permitindo estender o conjunto das álgebras até então conhecidas.

Sejam $\mathbb{H} = \{a + b\iota + cj + dk \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ o conjunto de todas as CL reais de ι, j, k ; e $q_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1)$, $q_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2) \in \mathbb{H}$.

Definimos

$$q_1 + q_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\iota + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k.$$

A multiplicação é definida por distributividade, considerando as regras: $\iota^2 = j^2 = k^2 = -1$, $\iota j = -j\iota = k$, $jk = -kj = \iota$, $k\iota = -\iota k = j$, donde $q_1 \star q_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1 + c_1 d_2 - d_1 c_2)\iota + (a_1 c_2 + a_2 c_1 + d_1 b_2 - b_1 d_2)j + (a_1 d_2 + a_2 d_1 + b_1 c_2 - c_1 b_2)k$.

Tecnicamente, \mathbb{H} é uma anel associativo não-comutativo (mais ainda: um anel de divisão).

3 Uma Representação Não Usual de \mathbb{H}

Podemos representar \mathbb{H} de várias maneiras como CL de $1, i, j$, e k :

1. Como um vetor dos quatro coeficientes nesta CL;
2. Como um escalar para o coeficiente de 1 e um vetor para os coeficientes dos termos imaginários.

Em 2., $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ é escrito como (a, \vec{v}) , onde \vec{v} é o vetor 3D $\vec{v} = (b, c, d)$.

Assim, para $q_1 = (a_1, \vec{v}_1)$ e $q_2 = (a_2, \vec{v}_2)$, temos:
 $q_1 + q_2 = (a_1 + a_2, \vec{v}_1 + \vec{v}_2)$, e
 $q_1 \star q_2 = (a_1 a_2 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2, a_1 \vec{v}_2 + a_2 \vec{v}_1 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_2)$ (produto escalar e produto vetorial, respectivamente).

Por conseguinte, se $\vec{0} = (0, 0, 0)$, então $(a, \vec{0}) \in \mathbb{R}$; e se $\vec{v} = (b, 0, 0)$, então $(a, \vec{v}) \in \mathbb{C}$.

A notação acima é não usual para matemáticos, mas é a preferida por engenheiros que trabalham com Computação Gráfica e Robótica, por motivos que veremos a seguir.

Mais ainda, para $q = (a, \vec{v}) \in \mathbb{H}$, temos que:

$-q = (-a, -\vec{v})$ é o simétrico de q ;

$\bar{q} = (a, -\vec{v})$ é o conjugado de q ;

$q^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + |\vec{v}|^2}, -\frac{\vec{v}}{a^2 + |\vec{v}|^2} \right)$ é o inverso de q ($q \neq 0$).

Quatérnios da forma $(a, \vec{0})$ são usualmente denotados por $a \in \mathbb{R}$. Se c é um escalar, então $c \star q = (ca, c\vec{v})$. Assim, $q^{-1} = \frac{(a, -\vec{v})}{a^2 + |\vec{v}|^2}$, onde $|\vec{v}|$ é a norma de \vec{v} , i.e., $|\vec{v}| = \sqrt{b^2 + c^2 + d^2}$. Finalmente, definimos a norma de q como $|q| = \sqrt{a^2 + |\vec{v}|^2}$.

4 Representando Rotações por Quatérnios

Podemos utilizar a multiplicação de quatérnios para efetuar uma rotação por um eixo unitário arbitrário \vec{u} de um ângulo θ .

O quatérnio que representa esta rotação é $q = (a, \vec{v})$, onde $a = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ e $\vec{v} = \vec{u} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

Note que $|q| = 1$, donde $q^{-1} = \bar{q}$.

Representaremos um ponto $P \in \mathbb{R}^3$ por $p = (0, \vec{P}) \in \mathbb{H}$. A rotação desejada é dada por

$$P_{rot} = q \star p \star q^{-1}.$$

5 Quatérnios Realmente Produzem 3D-Rotações?

Segundo K. Shoemake, (\mathbb{H}, \star) preserva normas, i.e., $N(p \star q) = N(p)N(q)$, donde $N(q^{-1}) = N(q)^{-1}$. Então $N(q \star p \star q^{-1}) = N(p)$. Portanto a aplicação $p \rightsquigarrow q \star p \star q^{-1}$ é uma transformação ortogonal em 4D.

Por outro lado, a multiplicação por escalar comuta, donde $q \star a \star q^{-1} = a$. Então a aplicação $p \rightsquigarrow q \star p \star q^{-1}$ é uma transformação ortogonal do vetor 3D de p .

Trata-se de um movimento contínuo da identidade a cada possível ação. Isto exclui reflexões, portanto a aplicação $p \rightsquigarrow q \star p \star q^{-1}$ é uma 3D-rotação.

6 Aplicações

Façamos duas rotações da garra do robô. Sejam $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ seus representantes unitários. A rotação composta é dada por

$$q_2 \star q_{1_{rot}} = (q_2 \star q_1) \star p \star (q_2 \star q_1)^{-1}.$$

A representação de rotações por quatérnios (4 n^{os}) é mais compacta que a por matrizes ortogonais (9 n^{os}).

Dados um eixo e um ângulo, é fácil construir o quatérnio correspondente, e reciprocamente. Ambos são bastante difíceis com matrizes ou ângulos de Euler.

Em *games* de computador e outras aplicações, interessam as rotações “suaves”, i.e., a imagem deve rotacionar lentamente e não de um passo só.

Isto pode ser obtido escolhendo uma curva em quatérnios, com um ponto final sendo a transformação identidade 1 e o outro sendo a rotação pretendida, o que é bem mais problemático com outros tipos de representações de rotações.

Ao compor muitas rotações num computador, erros de arredondamento acumularão.

Um quatérnio pode sofrer algum pequeno erro e ainda representar uma rotação.

Uma matriz que sofrer um pequeno erro não mais será ortogonal e não mais representará uma rotação por completo. É muito difícil voltar a fazer uma matriz destas ser ortogonal.

A matriz ortogonal que corresponde ao quatérnio unitário $q = a + bi + cj + dk$ é dada por:

$$\begin{pmatrix} a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2bc - 2ad & 2ac + 2bd \\ 2ad + 2bc & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2cd - 2ab \\ 2bd - 2ac & 2ab + 2cd & a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \end{pmatrix}.$$

Os quatérnios são muito utilizados em Computação Gráfica e associados à Análise Geométrica para representar rotações e orientações de objetos em \mathbb{R}^3 .

Também são usados em Teoria de Controle, Processamento de Sinais, Física e Mecânica Orbital.

Podemos ainda utilizar quatérnios para efetuar interpolações lineares entre matrizes de rotação, usando cinemática inversa.

No artigo associado a esta comunicação descrevemos algumas destas aplicações.

7 Representando Quatérnios por Matrizes

Há pelo menos duas maneiras de fazê-lo, usando homomorfismos de quatérnios-matrizes (preservando somas e multiplicações).

1. Usando $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$: o quatérnio $q = a + bi + cj + dk$ é dado por

$$\begin{pmatrix} a - di & -b + ci \\ b + ci & a + di \end{pmatrix}.$$

Esta representação apresenta boas propriedades:

- Todo número complexo corresponde a matrizes com entradas reais;
- O quadrado da norma do quatérnio é o determinante da matriz associada;
- O conjugado do quatérnio é a transposta conjugada da matriz associada;
- Para quatérnios unitários, fornece o grupo de isomorfismos entre a 3D-esfera \mathcal{S}_3 e $SU(2)$, importante em mecânica quântica no trato com *spins*.

2. Usando $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$: o quatérnio $q = a + bi + cj + dk$ é dado por

$$\begin{pmatrix} a & -b & d & -c \\ b & a & -c & -d \\ -d & c & a & -b \\ c & d & b & a \end{pmatrix}.$$

Neste caso, o conjugado do quatérnio é a transposta da matriz associada.

8 Conclusões e Ações Futuras

Com estas representações podemos descrever os modelos cinemáticos dos 3D-movimentos do nosso robô, generalizando a nossa 2D-descrição do WCETE'2004.

O uso do robô torna mais palpável ao aluno a compreensão de conceitos de Álgebra Linear e Geometria Analítica, mostra com mais riqueza aplicações de EDO e EDP, permite a interação entre teoria e prática em Linguagem de Programação e Métodos Numéricos, e é a concretização de um problema real que fará parte da sua vida profissional.

Como trabalhos futuros estudaremos os sistemas de equações não-lineares a várias variáveis, usando Bases de Gröbner para determinar a posição da garra do robô em cada ponto de sua trajetória, bem como os modelos dinâmicos da sua movimentação.

Agradecimentos

Os autores agradecem a colaboração voluntária do estudante Márcio Kronbauer, bem como do bolsista BIC Eduardo Dullius.

Claus Haetinger e Marcelo Malheiros

Centro III

Centro Universitário UNIVATES

95900-000, Lajeado-RS

e-mail: chaet@univates.br e mgm@univates.br

URL: <http://ensino.univates.br/~chaet>