Sobre critérios de divisibilidade

Carmen M. G. Táboas(*)
UFSCar
Departamento de Matemática
Rdvia. W. Luiz km 235
13 560 – São Carlos – SP

Hemano de Souza Ribeiro(*)
ICMSC-USP
Departamento de Matemática
Caixa Postal 668
13 560 – São Carlos – SP

A iniciativa de escrever este trabalho foi motivada pelos cursos destinados a professores do primeiro grau e desenvolvidos por nós sob a promoção do Departamento de Matemática da Universidade Federal de São Carlos em convênio com a Subsecretaria do Ensino Superior do MEC através do Projeto "Integração da Universidade com Escolas do Primeiro Grau". Nestes cursos, sentimos a necessidade de mostrar à nossa clientela a simplicidade das justificativas dos critérios de divisibilidade baseados apenas na compreensão do sistema de numeração decimal e do algoritmo de divisão. O propósito deste trabalho foi então o de ser uma pequena introdução ao assunto, que tivesse a característica da adaptabilidade por parte do professor aos diversos níveis de escolaridade dos seus alunos.

Os critérios de divisibilidade, no sistema de numeração decimal, são os critérios que estabelecem em que condições o número natural

(1) $N = a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0 = a_0 + 10a_1 + 100a_2 + \ldots + 10^{n-1}a_{n-1} + 10^n a_n$

é um múltiplo inteiro de 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc. em termos dos algarismos

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

De início, observamos que um critério de divisibilidade só é útil quando for mais simples do que a própria divisão. É por isso que nunca lembramos os critérios de divisibilidade por 7 e 13, enquanto dificilmente esquecemos os critérios de divisibilidade por 2, 4, 8, 3, 9 e 11 com os quais convivemos desde os primeiros anos de vida escolar: "N é um múltiplo inteiro de:

2, quando $a_0 = 0, 2, 4, 6,$ ou 8;

4, quando $a_1a_0 = a_0 + 10a_1$ é um múltiplo inteiro de 4;

5, quando $a_0 = 0$ ou 5;

8, quando $a_2a_1a_0 = a_0 + 10a_1 + 100a_2$ é um múltiplo inteiro de 8;

3 e 9, quando a soma dos dígitos $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ é, respectivamente, um múltiplo inteiro de 3 e 9;

11, quando $a_0 - a_1 + a_2 + \ldots + (-1)^n a_n$ é um múltiplo inteiro de 11".

O propósito destas linhas é o de recordar a simplicidade das justificativas dos critérios de divisibilidade no sistema de numeração decimal e o de exibir um método de determinação dos critérios de divisibilidade eficiente e adaptável a qualquer nível de escolaridade, em que se tenha adquirido a compreensão:

(i) *do sistema de numeração decimal* representada na equação (1) e

(*) Projeto Integração da Universidade com Escolas do Primeiro Grau – Convênio DM-UFSCar / SESU-MEC.

(ii) *do algoritmo da divisão:* para dois números naturais dados a e b, com $b \neq 0$, existem dois números naturais univocamente determinados q e r tais que:

$$a = bq + r, \ 0 \leqslant r < b$$

denominados, respectivamente, quociente e resto da divisão de a por b.

Vamos então primeiro à singeleza das justificativas dos critérios de divisibilidade por 2 e 5, 4 e 8, 3 e 9, 11:

(a) $$N = a_0 + (10a_1 + 100a_2 + \ldots + \ldots + 10^{n-1}a_{n-1} + 10^n a_n),$$

é, respectivamente, um múltiplo inteiro de 2 e 5 quando a_0 é um múltiplo inteiro de 2 e 5, isto é, quando $a_0 = 0, 2, 4, 6$ ou 8 e $a_0 = 0$ ou 5, visto que a parcela dentro do parêntesis é sempre um múltiplo de 2 e 5;

(b) $$N = a_0 + 10a_1 + (100a_2 + \ldots + \ldots + 10^{n-1}a_{n-1} + 10^n a_n)$$

$$[\text{respec.}, N = a_0 + 10a_1 + 100a_2 + (10^3a_3 + \ldots + 10^{n-1}a_{n-1} + 10^n a_n)]$$

é um múltiplo inteiro de 4 [respec., de 8] quando $a_1a_0 = a_0 + 10a_1$ é um múltiplo de 4 [respec., $a_2a_1a_0 = a_0 + 10a_1 + 100a_2$ é múltiplo de 8], visto que a parcela dentro do parêntesis é sempre um múltiplo de 4 [respec., de 8];

(c) $$N = (a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n) + [(10-1)a_1 + (100-1)a_2 + \ldots + (10^{n-1}-1)a_n + (10^n - 1)a_n]$$

é, *respectivamente*, um *mútiplo* inteiro de 3 e 9 quando a soma dos dígitos

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

é um múltiplo de 3 e 9, visto que a parcela dentro dos colchetes é sempre um múltiplo de 3 e 9;

(d) $$N = a_0 - a_1 + a_2 + \ldots + (-1)^n a_n + [11a_1 + 99a_2 + \ldots + (10^n - (-1)^n)a_n]$$

é um múltiplo inteiro de 11 quando a soma alternada dos dígitos

$$a_0 - a_1 + a_2 + \ldots + (-1)^n a_n$$

é um múltiplo de 11, visto que a parcela dentro dos colchetes é sempre um múltiplo de 11.

O estabelecimento dos demais critérios de divisibilidade e de suas respectivas justificativas tem a mesma simplicidade e concisão dos critérios agora lembrados e justificados. Mas o que buscamos não é a exibição dos vários critérios, a qual constitui uma tarefa interminável, e sim a idéia comum subjacente a todos os critérios a fim de que possamos construir um método rápido de determinação dos critérios de divisibilidade. Assim sendo, o leitor disposto a determinar, digamos, um critério de divisibilidade por 7 concluirá que, o que importa, são os restos da divisão de $1, 10, 100, \ldots, 10^{n-1}, 10^n$ por 7 que são respectivamente 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5, ... pois

$$N = a_0 + 3a_1 + 2a_2 + 6a_3 + 4a_4 + 5a_5 + \ldots + [7a_1 + 7 \cdot 14a_2 + 7 \cdot 142a_3 + 7 \cdot 1428a_4 + 7 \cdot 14285a_5 + \ldots]$$

será um múltiplo inteiro de 7 quando $a_0 + 3a_1 + 2a_2 + 6a_3 + 4a_4 + 5a_5 + \ldots$ for um múltiplo de 7, visto que a parcela dentro dos colchetes é um múltiplo de 7. Um outro critério de divisibilidade por 7 é o seguinte:

$$N = a_0 + 3a_1 + 2a_2 - a_3 - 3a_4 - 2a_5 + \ldots + [7a_1 + 7 \cdot 14a_2 + 7 \cdot 143a_3 + 7 \cdot 1429a_4 + 7 \cdot 14286a_5 + \ldots]$$

será um múltiplo inteiro de 7 quando $a_0 + 3a_1 + 2a_2 - a_3 - 3a_4 - 2a_5 + \ldots$ for um múltiplo de 7, visto que a parcela dentro dos colchetes é um múltiplo de 7.

Em geral, a idéia do critério de divisibilidade no sistema de numeração decimal pelo número natural não nulo p é a seguinte:

$$N = a_0 + 10a_1 + 100a_2 + \ldots + 10^n a_n = (pq_0 + r_0)a_0 + (pq_1 + r_1)a_1 + (pq_2 + r_2)a_2 + \ldots + (pq_n + r_n)a_n =$$

$$= a_0r_0 + a_1r_1 + a_2r_2 + \ldots + a_nr_n +$$
$$+ p[a_0q_0 + a_1q_1 + a_2q_2 + \ldots + a_nq_n]$$

– onde q_0 e r_0, q_1 e r_1, q_2 e $r_2, \ldots, q_n$ e r_n indicam, respectivamente, o quociente e o resto da divisão de 1, 10, 100, ..., 10^n por p – será um múltiplo inteiro de p quando $a_0r_0 + a_1r_1 + \ldots + a_nr_n$ for um múltiplo de p, visto que a última parcela é sempre um múltiplo de p. Portanto, um critério geral de divisibilidade por $p \neq 0$ no sistema de numeração decimal é assim enunciado:

"$N = a_na_{n-1} \ldots a_2a_1a_0$ *será um múltiplo inteiro de* $p \neq 0$ *quando e somente quando* $a_0r_0 + a_1r_1 + a_2r_2 + \ldots + a_{n-1}r_{n-1} + a_nr_n$ *for um múltiplo inteiro de* p."

Observe que cumprimos o que prometemos no início destas linhas: o método de determinação dos critérios de divisibilidade no sistema de numeração decimal é baseado apenas na compreensão do sistema de numeração decimal e do algoritmo da divisão.

A Tabela apresentada neste trabalho tem o objetivo único de ilustrar o critério de divisibilidade ora enunciado nos casos em que p = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 e 13. Para $p = 4$, $p = 8$ e $p = 11$, constam na Tabela a ilustração do critério enunciado e o critério equivalente a ele mais conhecido apresentado no início do trabalho. Por exemplo, para $p = 4$, é fácil ver que $a_0 + 2a_1$ será um múltiplo inteiro de 4 quando e somente quando a_1a_0 for um múltiplo de 4. Para p = 6, 7, 12 e 13, temos além da ilustração do critério, um outro critério ainda mais simplificado (por envolver números menores) que foi exemplificado no trabalho para o caso $p = 7$.

Os critérios apresentados na tabela de divisibilidade por 6, que é o menor múltiplo comum entre 2 e 3, além de serem equivalentes entre si, são equivalentes aos critérios de divisibilidade por 2 e por 3, tendo em vista as seguintes considerações:

1ª) O fato de N ser um múltiplo inteiro de 6 implica claramente que N é um múltiplo inteiro de 2 e de 3.

(2ª) O fato de N ser um múltiplo inteiro de 2 implica que $a'_0 = a_0/2 = 0, 1, 2, 3$ ou 4 e o fato de N ser um múltiplo inteiro de 3 acarreta que $a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ é um múltiplo de 3, isto é, $a_0 + a_1 + \ldots + a_n = 3q$ para algum número natural q. Isto posto,

$$a_0 + 4a_1 + \ldots + 4a_n =$$
$$= 2[2(a_0 + a_1 + \ldots + a_n) - 3a'_0] =$$
$$= 2[2 \cdot 3q - 3a'_0] =$$
$$= 6[2q - a'_0]$$

é um múltiplo de 6. Este é um dos critérios da divisibilidade por 6 apresentados na Tabela. Analogamente, a divisibilidade por 12, que é o menor múltiplo comum entre 3 e 4, também é equivalente à divisibilidade por 3 e por 4. Cumpre-nos fazer o registro do que este resultado é válido em geral.

A tabela anexa foi o meio encontrado para a ilustração dos critérios de divisibilidade por 2 até 13, de uma forma organizada e compacta. A divisibilidade por 13 foi incluída para mostrar a pouca praticidade de tal critério. O mesmo ocorre com a divisibilidade por 7. Como observamos no início, esta é a explicação do porque nós nunca lembramos os critérios de divisibilidade por 7 e por 13: tais critérios são tão trabalhosos de recordar e de aplicar que é melhor efetuar a divisão por 7 e por 13. Esta também é a razão da inutilidade prática da construção de tabelas de divisibilidade mais completas.

Em face do exposto, acreditamos que o propósito inicial do trabalho foi alcançado: recordamos a simplicidade das justificativas dos critérios de divisibilidade e mostramos uma maneira de determinação desses mesmos critérios, que pode ser facilmente adaptada pelo professor interessado ao nível de escolaridade dos seus alunos.

Antes de finalizarmos, gostaríamos de assegurar a aplicabilidade do processo proposto em outros sistemas de numeração que não o decimal, mostrando a divisibilidade por 7 no sistema de numeração com base 8: Sendo os restos da divisão de $1, 8, 8^2, \ldots, 8^n$ por 7 sempre 1, tem-se, em base 8, que se

$$N = (a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_8 =$$
$$= a_0 + 8a_1 + \ldots + 8^{n-1} a_{n-1} + 8^n a_n ,$$

onde

$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ será um múltiplo de $(7)_8$ se, e somente se, a soma de seus algarismos for divisível por 7, isto é, se e só se $a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ for um múltiplo inteiro de 7.

TABELA DE DIVISIBILIDADE NO SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL DE $N = a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$ POR:	
2	a_0 é um múltiplo inteiro de 2, $(a_0 = 0, 2, 4, 6, \text{ ou } 8)$
3	$(a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n)$ é um múltiplo inteiro de 3
4	$a_0 + 2a_1$ é um múltiplo inteiro de 4 $a_1 a_0$ é um múltiplo inteiro de 4
5	a_0 é um múltiplo inteiro de 5, $(a_0 = 0 \text{ ou } 5)$
6	$a_0 + 4a_1 + 4a_2 + \ldots + 4a_n$ é um múltiplo inteiro de 6 $a_0 - 2a_1 - 2a_2 - \ldots - 2a_n$ é um múltiplo inteiro de 6
7	$a_0 + 3a_1 + 2a_2 + 6a_3 + 4a_4 + \ldots$ é um múltiplo inteiro de 7 $a_0 + 3a_1 + 2a_2 - a_3 - 3a_4 + \ldots$ é um múltiplo inteiro de 7
8	$a_0 + 2a_1 \pm 4a_2$ é um múltiplo inteiro de 8 $a_2 a_1 a_0$ é um múltiplo inteiro de 8
9	$(a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ é um múltiplo inteiro de 9
10	a_0 é um múltiplo inteiro de 10, isto é, $a_0 = 0$
11	$a_0 + 10a_1 + a_2 + 10a_3 + \ldots + (1 \text{ ou } 10)a_n$ é um múltiplo inteiro de 11 $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_n$ é um múltiplo inteiro de 11
12	$a_0 + 10a_1 + 4a_2 + \ldots + 4a_n$ é um múltiplo inteiro de 12 $a_0 - 2a_1 + 4a_2 + \ldots + 4a_n$ é um múltiplo inteiro de 12
13	$a_0 + 10a_1 + 9a_2 + 12a_3 + 3a_4 + 4a_5 + \ldots$ é um múltiplo inteiro de 13 $a_0 - 3a_1 - 4a_2 - a_3 + 3a_4 + 4a_5 + \ldots$ é um múltiplo inteiro de 13