lá-las, deixando na mesa uma combinação segura.

III — Suponha que, após alguma das filas ter seu número de palitos reduzido a zero, o jogador B deixe uma das filas restantes com apenas 1 palito. Então, basta A tirar todos os palitos da outra fila, deixando que aquele último seja retirado por B e, conseqüentemente, fazendo com que B perca o jogo.

IV — Suponha que, após uma das filas ter seu número de palitos reduzido a zero, o jogador B "zera" outra fila. Então, basta A deixar apenas um palito na fila restante, fazendo também com que B perca o jogo.

V — Suponha que o jogador A deixou alguma fila com apenas um palito. Então, ocorre uma das três possibilidades:

a) as duas outras filas têm um palito cada uma,

b) as duas outras filas não têm nenhum palito,

c) as duas outras filas têm números diferentes de palitos uma da outra que, por sua vez, não serão 0 ou 1 simultaneamente.

Resumindo: O jogador que conseguir manter uma combinação segura na mesa ganha o jogo. Assim sendo, se a primeira disposição dos palitos na mesa formar uma combinação segura, a primeira pessoa a jogar vai desmanchar esta combinação segura. Logo, o segundo a jogar terá a sorte de poder recompor uma combinação segura e, se não errar, ganha o jogo. Da mesma forma, se a primeira disposição dos palitos na mesa não formar uma combinação segura, o primeiro a jogar poderá compor uma combinação segura e, novamente, se não errar, ganha o jogo.

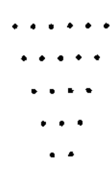
Portanto, ganhar (ou não) depende da probabilidade de se ter uma combinação segura na primeira disposição dos palitos na mesa. E também, de entender este artigo.

Ref.: Charles L. Bouton — Annals of Mathematics, ser. II, vol. 3, Nº 1, Oct. 1901, p. 35 (Nim, a game with a Complete Mathematical Theory).

Resta-um, Resta-zero e a operação Nim

Carlos Augusto Isnard
Instituto de Matemática Pura e Aplicada
Rio de Janeiro, RJ

Uma variante do jogo do NIM é praticada nas praias brasileiras, com os palitos substituídos por pontos marcados na areia que vão sendo apagados pelos jogadores. O jogo se inicia com seis filas horizontais que têm respectivamente 6, 5, 4, 3, 2 e 1 pontos.



Este jogo é, às vezes, chamado o *Resta-um.*

Os praticantes do jogo conhecem de memória as "combinações seguras" como P, S, T iguais a 1, 2, 3 ou 1, 4, 5 ou 3, 5, 6 ou n, n, 0 ($n \geqslant 2$), etc. O artigo anterior apresenta uma interessante caracterização matemática dessas combinações seguras, através da representação dos números na base 2.

Mesmo havendo uma quantidade arbitrária de filas, a disposição na base 2, descrita pelos autores, serve ainda para caracterizar as combinações seguras: a combinação será segura quando a soma dos algarismos de cada casa for par, isto é, quando cada coluna vertical tiver uma quantidade par de algarismos 1. Existe uma exceção a esta regra *que ocorre quando nenhuma fila horizontal* tiver mais do que um ponto: uma quantidade ímpar de filas com um só ponto é obviamente uma combinação segura para o Resta-um.

O *Resta-zero* é outro jogo, cujas regras são as mesmas do Resta-um, exceto pela definição do vencedor: na regra do Resta-zero o vencedor é quem conseguir apagar o último ponto. As combinações seguras do Resta-zero têm uma caracterização simples: são as mesmas do Resta-um sem a exceção desagradável no caso em que nenhuma fila tem mais do que um ponto. É óbvio que uma quantidade par de filas de um só ponto é uma combinação segura para o Resta-zero.

Existe uma interessante operação comutativa e associativa relacionada a esses jogos, a operação Nim, definida no conjunto $\mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$ por $P \oplus S = T \Leftrightarrow P$, S, T é combinação segura para o Resta-zero (o que significa que é também combinação segura para o Resta-um, se $P \geqslant 2$ ou $S \geqslant 2$).

Temos: $n \oplus 0 = n = 0 \oplus n$ e $n \oplus n = 0$, para qualquer $n \in \mathbb{Z}^+$, de maneira que na operação $\oplus$, $\mathbb{Z}^+$ é um grupo comutativo com identidade 0 e tal que o inverso de cada n é o próprio n (o grupo Nim).

Havendo m filas com $p_1, p_2, \ldots, p_m$ pontos, então essa combinação é segura para o Resta-zero se e somente se

$$p_m = p_1 \oplus \ldots \oplus p_{m-1},$$

ou seja, se e somente se $p_1 \oplus \ldots \oplus p_m = 0$.

Por exemplo 2, 3, 4, 5 é combinação segura (para o Resta-zero, logo também para o Resta-um), porque $2 \oplus 3 \oplus 4 = 5$ (cálculo: $2 \oplus 3 = 1$ e $1 \oplus 4 = 5$, pois 1, 2, 3 e 1, 4, 5 são combinações seguras conhecidas).

Da mesma maneira 1, 5, 4, 3, 2, 1 é combinação segura para ambos os jogos porque $1 \oplus 5 \oplus 4 = 0$ e $1 \oplus 3 \oplus 2 = 0$ (pois 1, 4, 5 e 1, 2, 3 são combinações seguras).

A seguinte regra é útil quando os números *são muito grandes: Se* $P < 2^k$, então $2^k + P = 2^k \oplus P$ $(P,\ k \in \mathbb{Z}^+)$. Em conseqüência, se $P < 2^k$ e $S < 2^k$ então $2^k + P$, $2^k + S$, T é combinação segura, se e somente se P, S, T é combinação segura (P, S, T, $k \in \mathbb{Z}^+$).

Como aplicação, algumas computações Nim:

19, 21, 6 é combinação segura porque $19 \oplus 21 = (16 \oplus 3) \oplus (16 \oplus 5) = 3 \oplus 5 =$ $= 6$; podemos calcular $3 \oplus 5 = (2 \oplus 1) \oplus$ $\oplus (4 \oplus 1) = 2 \oplus 4 = 6$ (usamos várias vezes $2^k \oplus P = 2^k + P$ se $P < 2^k$, $P, k \in \mathbb{Z}^+$).

No filme "O ano passado em Marienbad" o jogo aparece várias vezes com cartas de baralho no lugar de pontos ou palitos, iniciando-se com a combinação 7, 5, 3, 1 que é uma combinação segura porque $1 \oplus 3 \oplus 5 \oplus 7 = 2 \oplus 5 \oplus 7 =$ $= 2 \oplus (4 \oplus 1) \oplus (4 \oplus 3) = 2 \oplus 1 \oplus 3 = 0$ ou porque na base 2 temos

$$\begin{array}{rr} 7: & 111 \\ 5: & 101 \\ 3: & 11 \\ 1: & 1 \\ \hline & 224. \end{array}$$

Referências:

Winning Ways for your Mathematical Plays
E. Berle Kamp, J. Conway e R. Guy,
London Academic Press, 1982, 2 volumes