

# INCORPORANDO SISTEMAS COMPUTACIONAIS ALGÉBRICOS ÀS DISCIPLINAS DE CÁLCULO

Angela Rocha dos Santos<sup>1</sup> e Waldecir Bianchini<sup>2</sup>

**Resumo** — Este trabalho tem como objetivo divulgar e compartilhar a experiência que tem sido realizada no Instituto de Matemática da UFRJ (IM-UFRJ) no sentido de incorporar o uso do computador e de sistemas computacionais algébricos, no caso o MAPLE, em disciplinas de cálculo.

As atividades desenvolvidas procuram valorizar o pensamento matemático e privilegiam uma abordagem exploratória baseada na cadeia → explorar → conjecturar → concluir → demonstrar, promovendo, dessa maneira, uma mudança no esquema definição → teorema → demonstração → corolário usado, tradicionalmente, para o ensino de cálculo. A estratégia adotada visa envolver o aluno no processo de "fazer matemática", transformando-o de paciente em agente do processo educativo.

*Termos de referência* — *Ensino de Cálculo, computador no ensino, aprendendo cálculo com Maple.*

## INTRODUÇÃO

Tanto no Brasil como no exterior, o ensino de Cálculo ocupa uma porção considerável do currículo dos cursos das mais diversas áreas. Este fato se justifica, pois desde o século XVII, o cálculo tem se revelado a principal ferramenta matemática para aplicações científicas e tecnológicas. Talvez porque as origens e aplicações do cálculo sejam tão antigas e tradicionais, os textos que utilizamos hoje para o seu ensino, com pequenas diferenças de conteúdo no mundo inteiro, seguem uma filosofia educacional iniciada no século XIX, originária na concepção de um modelo de ensino estruturado e institucionalizado em torno da "École Polytechnique" de Paris cujos diversos "cursos" escritos e editados serviram, mais tarde, para o modelo de ensino de ciências e matemática em todo mundo. Estes textos e nossas aulas, neles baseadas, seguem a metodologia sumarizada na cadeia definição → teorema → demonstração → corolário (aplicações).

Esta forma de apresentação da matemática como um corpo de conhecimento pronto e acabado é resultado de um processo de filtragem que esconde os esforços criativos existentes por detrás de cada resultado obtido, oferecendo pouca margem de indagação e análise e impedindo, em última análise, que o aluno seja colocado diante do desafio de conduzir um processo de investigação científica ou de apreciá-lo com visão crítica.

Por outro lado, muito se tem falado das inúmeras possibilidades potenciais que se abrem no processo ensino-aprendizagem, a partir da introdução do computador como um novo e poderoso recurso didático. Desde sua popularização, o problema-desafio que enfrentamos, é descobrir a maneira adequada de canalizar este potencial de modo a obtermos um salto qualitativo na aprendizagem de matemática, de um modo geral, e do cálculo, em particular.

A primeira parte deste artigo é voltada para a descrição da filosofia, objetivos e estratégias que norteiam o trabalho desenvolvido no IM-UFRJ. Na segunda parte, são fornecidos alguns exemplos focalizando pelo menos quatro aspectos nos quais a abordagem computacional pode ter um impacto significativo na qualidade do ensino que ministramos.

## PRESSUPOSTOS, OBJETIVOS E ESTRATÉGIAS

Sistemas de computação algébrica, como o MAPLE e o MATHEMATICA, por exemplo, podem conduzir a novas maneiras de lidar com problemas permitindo o desenvolvimento de dezenas de "experiências matemáticas" que ajudam os alunos a visualizar, experimentar, fazer conjecturas razoáveis, idealizar como provar estas conjecturas, obter novas provas, perceber conexões entre conceitos e teorias e até mesmo, chegar a novas definições.

Estas implicações apontam na direção da reformulação de currículos e metodologias de ensino onde se diminua a ênfase no desenvolvimento de habilidades mecânicas e em técnicas algébricas, voltando-se o foco principal para a compreensão dos conceitos de tal maneira que o "por quê" seja, no mínimo, tão importante do que o "como".

Quando sistemas computacionais algébricos são usados para ensinar cálculo, investigações sobre qualidades típicas da ferramenta - o que elas podem, ou não podem, fazer e como fazem - devem ser incluídas entre os conteúdos abordados. Exemplos simples deste tipo de investigação surgem a partir da tentativa de se compreender imagens obtidas como saídas a determinados comandos. O gráfico da figura 1 é o que aparece na tela do computador quando o comando "plot" do Maple, utilizado para obter gráficos de funções, é usado para traçar o gráfico da função raiz cúbica.

```
> plot(x^(1/3),x=-3..3);
```

<sup>1</sup> Angela Rocha dos Santos, Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Ilha do Fundão, CP 68530, CEP 21945-970, Rio de Janeiro, RJ, Brazil, angela@im.ufrj.br

<sup>2</sup> Waldecir Bianchini, Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Ilha do Fundão, CP 68530, CEP 21945-970, Rio de Janeiro, RJ, Brazil, waldecir@im.ufrj.br

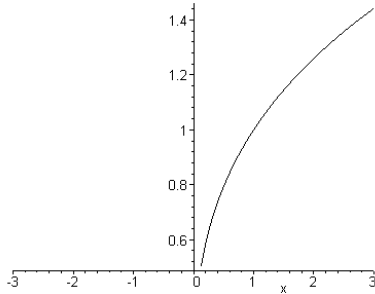


FIGURA 1

Tendo em vista que este não é o gráfico correto desta função, investigações visando a descobrir como a figura acima foi produzida e o que fazer para obter o gráfico correto, podem suscitar questões interessantes sobre igualdade e domínio de funções, funções inversas, simetrias e paridade. A propósito, o MAPLE define  $x^{1/3}$  como  $e^{(1/3)\ln(x)}$  e o gráfico correto pode ser obtido de duas maneiras: utilizando-se o comando "plot" conjugado ao comando "surd(x,n)" (`plot(surd(x,3),x=-3..3)`), que calcula a raiz enésima de  $x$ , ou ao comando "piecewise" (`plot(piecewise(x>0,x^(1/3),x<=0,-abs(x^(1/3))),x=-3..3)`) que define uma função por partes.

O poder computacional da ferramenta utilizada pode e deve definir o tipo de atividade desenvolvida em classe. As capacidades gráficas destes sistemas tornam possível aprender e ensinar os fundamentos do cálculo de uma forma completamente diferente da maneira tradicional. Enquanto algumas habilidades e técnicas não têm mais a mesma importância do que há alguns anos atrás, os alunos devem, agora, desenvolver a capacidade de controlar e analisar as saídas computacionais obtidas por meio de comandos e/ou rotinas computacionais, em casos simples. Além disso, a integração entre os aspectos gráfico-geométricos, analíticos e numéricos dos conceitos abordados tem um enorme potencial de aumentar a capacidade dos alunos na resolução de problemas nos quais o Cálculo é a ferramenta básica.

Nesse sentido, quando usamos as facilidades gráficas desses sistemas computacionais fica muito mais fácil estudar as nuances e características locais de cada gráfico. Para isso, buscamos "janelas" adequadas, onde se mostra apenas a parte do gráfico que se quer estudar. A escolha da "janela" será determinada tanto pela função que se pretende visualizar quanto pelo tipo de característica ou comportamento que se quer estudar. Os exemplos a seguir visam a ilustrar estas idéias.

A figura 2 mostra o gráfico do polinômio  $y = x^5 + 9x^4 - 19x^3 - 241x^2 - 150x + 200$ , traçado com a ajuda do Maple, para valores de  $x$  variando no intervalo  $[-10,10]$ . Na tentativa de melhor visualizar suas características locais, traçamos um outro gráfico, a figura 3, restringindo a variação de  $y$  ao intervalo  $[-10,10]$ .

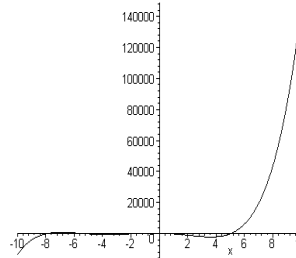


FIGURA 2

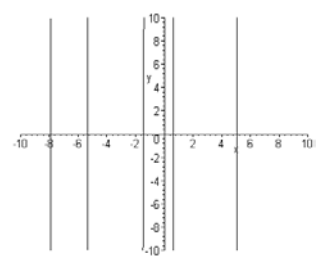


FIGURA 3

Embora o gráfico da figura 3 pareça nos dar menos informações que o da figura 2, ele permite localizar, com uma certa precisão, os zeros da função. Analisando esses dois gráficos e usando alguns conceitos de cálculo podemos encontrar uma janela mais adequada para melhor visualizarmos os extremos do polinômio estudado.

A figura 4, mostra o gráfico da função  $f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 - 12x + 49}{(x-2)(x-7)}$ , traçado com a ajuda do

Maple no intervalo  $[-1000,1000]$ . Evidentemente, esta não é uma representação gráfica adequada para a função considerada; no entanto, esta imagem sugere a existência de uma assíntota inclinada ao gráfico da função e pode servir de motivação tanto para tentativas de provas desta conjectura quanto para a necessidade de definições precisas e para o desenvolvimento de estudos a respeito da existência de assíntotas e de outras funções limitantes, bem como do método a ser empregado para determiná-las.

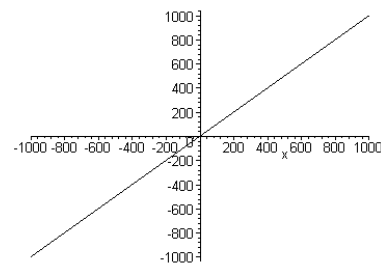


FIGURA 4

A igualdade:

$$\frac{x^3 - 6x^2 - 12x + 49}{(x-2)(x-7)} = x + 3 - \frac{9}{5(x-2)} + \frac{14}{5(x-7)}$$

obtida, sem dificuldade, com o auxílio do programa computacional, indica não só o caminho a seguir como também a equação da assíntota ao gráfico da função.

Traçando-se, na mesma janela ( $[-10..15]$  por  $[-10..15]$ ), os gráficos da função  $f$  e da reta  $y = x + 3$ , a imagem obtida parece confirmar que a reta em questão é realmente a assíntota procurada.

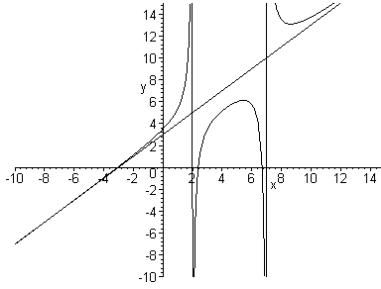


FIGURA 5

Esta conjectura é facilmente demonstrada a partir do exame dos limites

$$\lim_{x \rightarrow (-\infty)} \left[ \frac{x^3 - 6x^2 - 12x + 49}{(x-2)(x-7)} - x + 3 \right] \quad \text{e}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^3 - 6x^2 - 12x + 49}{(x-2)(x-7)} - x + 3 \right].$$

Além disso, a figura 5 parece indicar também que o gráfico intercepta a sua assíntota em algum ponto entre -10 e -5. Esta conjectura pode ser facilmente investigada, e provada com a ajuda do computador, ou traçando-se um novo gráfico com uma janela adequada envolvendo o ponto que procuramos ou, então, resolvendo-se a equação  $f(x) = x + 3$  com o comando `solve((x^3-6*x^2-12*x+49)/((x-2)*(x-7))=x+3,x)`

O trabalho desenvolvido no IM-UFRJ explora pelo menos cinco aspectos nos quais a abordagem computacional pode ser usada para apresentar a matemática como um assunto vivo, em constante construção, transformando a tarefa de ensinar-aprender cálculo numa atividade criativa, que exige, necessariamente, a participação ativa tanto de alunos como de professores. Estes aspectos são:

- (a) desenvolvimento de modos alternativos para a introdução dos conceitos;
- (b) desenvolvimento de "experiências matemáticas" baseadas no tripé explorar-conjecturar-concluir/demonstrar;
- (c) integração dos aspectos gráfico-geométricos, analíticos e numéricos, incluindo a visualização e interpretação geométrica de resultados e teoremas;
- (d) apresentação e desenvolvimento de projetos de modo a permitir a aplicação dos conceitos e resultados a situações e problemas que os alunos nunca tenham visto antes;
- (e) realização de trabalhos rotineiros de cálculo longos, tediosos ou cansativos, liberando o tempo de alunos e professores para pensarem criativamente.

Dentro da abordagem proposta, as "experiências matemáticas" são desenvolvidas em laboratórios de micro-computadores, com dois alunos por máquina e as aulas expositivas são realizadas com o apoio de projetores multimídia.

Além do desenvolvimento de habilidades de comunicação oral e escrita, os projetos visam a desenvolver habilidades para a modelagem de situações reais e, por

fugirem do padrão usual de exercícios e problemas típicos que aparecem nos livros de cálculo, exigem um nível mais alto de dedução, análise e crítica, por isso foram concebidos para serem desenvolvidos em grupo.

Tanto os projetos como as atividades em laboratório estimulam o trabalho colaborativo tão importante na sociedade super-especializada em que vivemos, onde equipes interdisciplinares são cada vez mais imprescindíveis para o desenvolvimento de projetos complexos. Dessa forma, experiências que incorporem o raciocínio e a forma de pensar de outra pessoa à sua própria forma de pensar e raciocinar, são um ingrediente importante e essencial na formação do profissional do século XXI.

O material utilizado forma um conjunto de textos eletrônicos, interativos, preparados com auxílio do MAPLE, podendo ser adaptado para utilização a partir de qualquer outro sistema computacional algébrico, como mostram os exemplos da próxima seção.

### COLOCANDO AS IDÉIAS EM PRÁTICA

O objetivo das seções que se seguem é ilustrar com alguns exemplos e comentários, como os aspectos citados podem ser explorados, durante um curso de cálculo, com o auxílio de um computador equipado com um sistema computacional algébrico. É claro que, na maioria das atividades apresentadas, mais de um dos aspectos citados estão envolvidos. No entanto, pretendemos chamar atenção para aquele que, em cada caso, predomina sobre os demais.

#### Traçado de gráficos em computador: Introduzindo os conceitos de retas tangentes e linearidade local

O Maple e vários outros sistemas computacionais algébricos traçam o gráfico de uma função  $y = f(x)$ , num determinado intervalo  $[a,b]$  gerando uma lista de pontos da forma  $(x,f(x))$  através de um algoritmo interno que os distribui inteligentemente e os liga por segmentos de reta, obtendo assim uma boa aproximação do gráfico da função desejada. Examinar como, por quê e para que funções este método funciona pode servir como investigação inicial para motivar a introdução dos conceitos de reta tangente, linearidade local e diferenciabilidade.

A idéia é usar o computador como um poderoso microscópio para examinar o comportamento local do gráfico da função. A técnica, que chamamos de zooms sucessivos, consiste em aumentar a cada passo, a ampliação obtida pelo computador/microscópio. Este efeito pode ser obtido traçando-se sucessivos gráficos da função em intervalos do tipo  $[x - \delta, x + \delta]$ , para valores de  $\delta$  cada vez menores. Usando essa técnica, os alunos poderão observar que à medida que o comprimento do intervalo diminui, o gráfico da função se assemelha cada vez mais a uma linha reta. Dessa maneira, é possível caracterizar uma dada curva como a reta que aproxima ou se confunde com a curva na vizinhança do ponto de tangência.

Resposta a indagações do tipo:

(a) qual a declividade da tangente à curva num dado ponto?

(b) dado o ponto de tangência, qual a equação da reta tangente à curva?

(c) como é possível, com a ajuda do nosso computador/microscópio, calcular a declividade da reta tangente ao gráfico de uma função, num dado ponto da mesma?

(d) é possível imaginar uma função cujo gráfico não se pareça com uma linha reta usando-se a técnica de zoom, descrita acima?

surgem naturalmente e podem conduzir a outras investigações que consolidam e aprofundam o conceito de linearidade local. Por exemplo, a resposta ao item (c) conduz à aproximação da declividade da tangente pela declividade de secantes, à introdução intuitiva do conceito de limite e à definição geométrica da derivada de uma função como declividade da reta tangente à curva. A resposta ao item (d) leva ao exame de dois comportamentos distintos, estudando por exemplo os gráficos das funções  $f(x) = |x|$  e  $g(x) = \text{sen}(1/x)$  na vizinhança de  $x = 0$ . Estas explorações levam naturalmente à conceituação de função diferenciável em um ponto.

Um outro conceito a ser explorado a partir da maneira como o computador traça gráficos é o de continuidade. As figuras 6, 7, 8 e 9 mostram os gráficos das funções  $f(x) = |(x-1)/(x-1)$ ,  $g(x) = (x^2 - 9)/(x - 3)$ ,  $h(x) = 1/(x - 1)$  e  $k(x) = 1/(x - 1)^2$ , respectivamente, traçados com a ajuda do Maple.

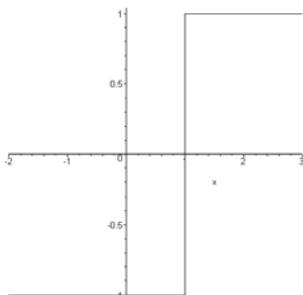


FIGURA 6

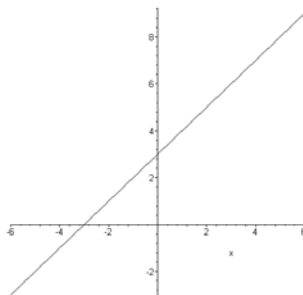


FIGURA 7

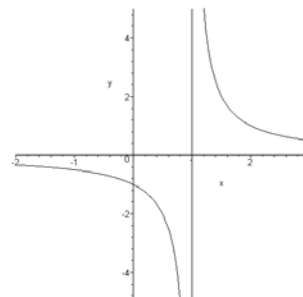


FIGURA 8

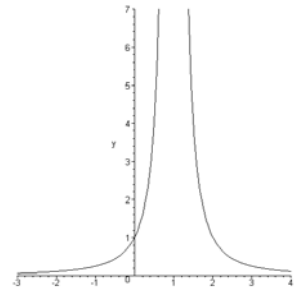


FIGURA 9

O gráfico da figura 6, evidentemente, não pode ser o gráfico de uma função. Entender porquê é este o gráfico que surge na tela, a partir do conhecimento da forma de como o programa traça gráfico, conduz diretamente ao estudo de funções descontínuas. Os gráficos da figuras 6 e 7 permitem concluir que há diferentes tipos de descontinuidades. Este estudo pode ser motivado por questões do tipo: o primeiro gráfico pode ser o gráfico de uma função? Para que tipos de funções o programa traça este tipo de gráfico? O que leva o Maple a traçar o gráfico da figura 7 como se fosse o de uma reta? Por que aparece uma reta vertical quando o Maple traça o gráfico da função  $h$ ? Se esta reta é a assíntota ao gráfico da função  $h$ , por que uma reta semelhante não aparece ao traçarmos o gráfico da função  $k$ ? Qual a diferença no comportamento dessas duas últimas funções para valores de  $x$  próximos de 1?

### Visualizando Teoremas, Idealizando Provas e Integrando Aspectos Geométricos e Analíticos

Uma das aplicações mais óbvias do uso do computador no ensino está relacionada a representação de superfícies em três dimensões. Como a grande maioria dos professores não tem habilidades artísticas suficientes que permitam representar numa superfície bidimensional (folha de papel ou quadro-negro) esses gráficos, a sua visualização sempre representou um problema em cursos de cálculo. Nesse sentido, o computador pode ser de grande ajuda no estudo das superfícies, pois estas superfícies podem ser rapidamente desenhadas e manipuladas na tela de modo a permitir visualizações sob diferentes ângulos. Dessa maneira, é possível não somente visualizar sua forma básica mas também observar e estudar características importantes, tais como, extremos relativos, pontos de sela e diferenciabilidade, por exemplo.

Ao lado dessas visualizações tridimensionais, enquadram-se também na classe das aplicações computacionais óbvias as animações que ilustram o Método de Fermat para o cálculo da declividade da tangente por meio de aproximações por declividades de secantes e o cálculo aproximado da área sob uma curva por meio de somas de Riemann e a conseqüente definição da integral definida como o limite dessas somas, dentre outras.

### Idealizando provas

Usando gráficos, é possível chegar a conclusões a respeito da existência de limites não triviais, chegar a uma conjectura para o seu valor e idealizar uma possível maneira para provar a conjectura feita.

Por exemplo, a figura 10 nos mostra o gráfico da função  $g(x) = x \cos^2(1/x)$  e nos sugere como usar o Teorema do Confronto para concluir que  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ . Por meio da

figura 11 é possível estimar o valor do limite

$\lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(x+5) - \ln(x))$  e, usando a Regra de

L'Hôpital, confirmar o palpite feito.

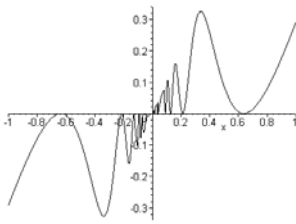


FIGURA 10

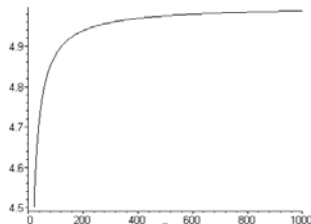


FIGURA 11

### Realizando trabalhos longos e cansativos e (ainda) aprendendo cálculo

Os sistemas de computação algébrica tais como o Maple, podem ser utilizados, inteligentemente, para realizar trabalhos rotineiros de cálculo, liberando alunos e professores para pensar, imaginar e criar. Além disso, podemos usar a máquina para mostrar a nossos alunos porquê, apesar da máquina, precisamos saber cálculo. Programas computacionais algébricos estão sendo cada vez mais usados, por exemplo, no cálculo de integrais. O Maple utiliza o comando `int(f(x),x)` para realizar estes cálculos, como vemos abaixo.

> `Int(x^3*sqrt(x^4+2),x):%=int(x^3*sqrt(x^4+2),x)+c;`

$$\int x^3 \sqrt{x^4 + 2} dx = \frac{(x^4 + 2)^{3/2}}{6} + c$$

No entanto podemos usar o Maple, inteligentemente, para executarmos e ilustrarmos, passo a passo o método da substituição. Isto é possível porque o Maple possui uma subrotina, `changevar(u = g(x), Int(f(x),x),u)`, que permite que se calcule integrais usando uma determinada substituição de variáveis. Existem, ainda, integrais que são perfeitamente possíveis de serem resolvidas por substituição mas que o Maple e outros sistemas de computação algébrica semelhantes, não conseguem resolver. No entanto, se usarmos a subrotina acima, dizendo ao programa que substituição deve ser feita, a cada passo, "ensinamos" ao computador como calcular a integral em questão.

### CONCLUSÕES

A utilização de sistemas computacionais algébricos no ensino de cálculo permite a realização de "experiências matemáticas" que facilitam o surgimento de conjecturas, promovem a integração de aspectos geométricos e analíticos e, valorizando o pensamento matemático, podem ter um impacto significativo na qualidade do ensino que ministramos. Frequentemente, os experimentos e projetos com o computador sobrepõem, em muito, as aulas expositivas e, especialmente os projetos, devem estar

relacionados a situações reais clarificando para o aluno a relação íntima matemática-natureza.

Essas novas possibilidades devem ser consideradas na (re)definição de currículos, na atualização das ementas e no estabelecimento de novas metodologias de aprendizagem, sem detrimento de uma sólida formação matemática, ao contrário, desvendando para o aluno, o prazer, a beleza e o verdadeiro significado de "fazer matemática". Os professores devem estar preparados para responder e explorar as questões matemáticas que surgem no decorrer das experiências, assim como aproveitar características específicas do programa utilizado para diminuir a ênfase no desenvolvimento de habilidades mecânicas e em técnicas algébricas, deslocando o foco das aulas do "como" para o "por quê".

Professores que têm participado da experiência desenvolvida nos últimos cinco anos no IM-UFRJ ou que já tiveram oportunidade de observar os alunos em aulas de laboratório são testemunhas da mudança que se opera tanto na atitude dos alunos, em geral passiva nas aulas tradicionais, quanto na maneira de encarar o aprender e o entender matemática.

O sucesso do uso dessas novas tecnologias no processo ensino-aprendizagem, no nosso entender, repousa na compreensão do porquê usá-las e na redefinição de práticas docentes que estabeleçam o como usá-las. Esperamos que nosso trabalho possa contribuir de alguma forma nesta direção.

### REFERÊNCIAS

- [1] Bauldry, W. C. and Fiedler, J.R., Calculus projects with Maple V - A Tool, not na Oracle, *Brooks/Cole Publishing Company*, 1996.
- [2] Bianchini, W. e Santos, A.R. dos, Aprendendo Cálculo com Maple - Cálculo de uma variável, *Editora LTC*, 2002.
- [3] Bianchini, W., Giraldo, V., Kubrusly, R. S. e Santos, A.R., Introdução às Funções Reais - Um Enfoque Computacional, *IM Editora*, 1998.
- [4] Cnop, I, New Insight in mathematics by live CAS documents, *Proceedings of the ICMI meeting on the teaching and learning of Algebra*, Melbourne, Australia, 2001.
- [5] Kooij, H. van der, Functional Algebra with the use of the Graphing Calculator, *Proceedings of the ICMI meeting on the teaching and learning of Algebra*, Melbourne, Australia, 2001.
- [6] Thomas, M.J.O., *Building a Conceptual Algebra Curriculum: The Role of Technological Tools*, *Proceedings of the ICMI meeting on the teaching and learning of Algebra*, Melbourne, Australia, 2001.