OS NÚMEROS COMPLEXOS E A GEOMETRIA DINÂMICA

José Paulo Carneiro — UERJ
Augusto Wanderley — UERJ

1. Introdução

Os números complexos nasceram no século XVI, no contexto algébrico da resolução das equações do 3º e 4º graus. Durante mais de dois séculos, suas propriedades foram desenvolvidas, mas eram tratados como monstros sem sentido, usados con vergonha, e acompanhados de nomes ofensivos, que permaneceram até hoje na nossa nomenclatura — como "imaginários". Somente na virada do século XVIII para o século XIX, graças a Wessel, Argand e Gauss, se compreendeu que os complexos não têm nada de "irreal". São apenas os pontos (ou vetores) do plano, que se somam por composição de translações, e que se multiplicam por composição de rotações e homotetias.

Atualmente está bastante claro o papel central dos números complexos na Matemática, assim como suas incontáveis utilidades, aparecendo inevitavelmente em problemas que envolvem rotação, círculo, funções "circulares"(trigonométricas), movimentos periódicos, e no estudo de circuitos elétricos, corrente alternada, astronomia e motores.

Porém, passados mais de dois séculos, esta visão geométrica ainda não se incorporou ao ensino. Permanece como maneira mais comum de introduzir os complexos a abordagem puramente algébrica e formal: "Um número complexo é un objeto da forma $a+bi$, onde a e b son reais, $i^2=-1$, e permanecem válidas as leis operatórias básicas da álgebra". Esta definição (correta) permite começar logo a operar com complexos sem dificuldade, mas este enfoque perde a magnífica oportunidade de apresentar os complexos imediatamente como entes geométricos, e a experiência de aula nos mostra que muitas vezes esta oportunidade não se recupera, mesmo quando, mais tarde, aparece a "forma trigonométrica". O iniciante permanece com uma visão excessivamente formal e algebrizante, e não lhe ocorre aplicar conhecimentos de números complexos a problemas de Geometria, como se faz desde Gauss.

Por outro lado, a Geometria Dinâmica abriu novos caminhos didáticos para a apresentação da geometria e, portanto, para o ensino dos números complexos. Identificando imediatamente os números complexos $a+bi$ com os pontos (ou vetores) do plano $(a;b)$, as operações com complexos aparecem já na forma geométrica, e podem-se fazer aplicações a problemas de Geometria ou utilizar a Geometria Dinâmica para ilustrar propriedades e resolver problemas, formular conjecturas e demonstrar teoremas, inclusive o Teorema Fundamental da Álgebra, em geral considerado como tema de Matemática avançada. Neste trabalho, utilizamos o Cabri-Géomètre II.

2. Número complexo

Um número complexo é um par ordenado $(a; b)$ de números reais. O conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos coincide, portanto, com o conjunto $\mathbf{R}^2$ de todos os pares ordenados de números reais e, geometricamente, um complexo pode ser visto como um **ponto** no plano cartesiano. Por outro lado, existe uma correspondência perfeita entre cada ponto P do plano e o **vetor** definido pelo segmento orientado $\overrightarrow{OP}$, onde O é a origem. Assim, identificamos: ponto $P = (a; b)$, número complexo $(a; b)$, e vetor $\overrightarrow{OP} = (a; b)$. Quem estiver mais acostumado a conceber um número complexo como algo da forma $a + bi$, onde a e b são reais, etc., pode, por ora, pensar em $a + bi$ como $(a; b)$. Portanto, i se identifica com o ponto $(0; 1)$, ou com o vetor que vai da origem a $(0; 1)$.

O **módulo**, ou valor absoluto, de um complexo, como para qualquer vetor no plano, é sua distância à origem, isto é: se $z = (x; y)$, então $|\, z \,| = \sqrt{x^2 + y^2}$. No Cabri, é fácil calcular o módulo de um complexo, usando "distância e comprimento".

3. Adição

A adição de complexos é a adição usual de vetores no plano, ou seja: por definição, $(a; b) + (c; d) = (a + c; b + d)$.

É possível aplicar imediatamente esta definição para somar dois complexos no Cabri, já que Cabri permite exibir eixos e coordenadas, e trabalhar com elas. Mas isto nem sempre é conveniente, pois muitas vezes não desejamos adotar os eixos padrão do Cabri, e mesmo que se criem "Novos eixos", com também é possível, a presença de eixos obrigará sempre a menção desses eixos, o que pode ser um estorvo em uma macro, por exemplo.

É melhor, pois, observar que, geometricamente, esta adição traduz a chamada "regra do paralelogramo". Em outros termos, se a for um complexo fixo, a transformação do plano em si mesmo que a cada complexo (ponto) z associa o complexo (ponto) $a + z$ é a **translação** definida pelo vetor (ou ponto, ou complexo) a. A partir daí, é fácil fazer, no Cabri, uma construção para somar dois complexos, utilizando translação: dados somente a origem e os dois complexos u e v, cria-se o "Vetor" que vai da origem até o ponto u e faz-se a "Translação" de v segundo este vetor, obtendo o ponto $u + v$ (ou $v + u$). Uma alternativa mais simples ainda usa o fato de que as diagonais de um quadrilátero se cortam ao meio se e só se ele é um paralelogramo: o simétrico da origem em relacção ao ponto médio de u e v é $u+v$. A esta altura, é útil fazer uma "macro" para a adição de complexos.

É fácil (embora talvez tedioso) verificar algebricamente que a adição de complexos é comutativa e associativa; que $(0;0)$ é neutro para a adição de complexos, e que cada complexo $z=(a;b)$ tem um único simétrico $-z=(-a;-b)$ para a adição. O complexo $(0;0)$, isto é, a origem do plano, é chamado de **complexo nulo**.

Geometricamente, o simétrico $-z$ do complexo z é o transformado de z pela **simetria central** de centro na origem. Portanto, a determinação do simétrico no Cabri é imediata.

Define-se a **diferença** $z-w$ entre complexos como sendo $z+(-w)$, e com isto pode-se também criar uma macro que construa $z-w$, dados a origem, z e w. É imediato verificar algebricamente que as coordenadas da diferença de dois complexos são iguais às diferenças de suas coordenadas.

4. Multiplicação de um real por um complexo

Se $r \in \mathbf{R}$ e $z=(a;b) \in \mathbb{C}$, então se define: $rz=(ra;rb)$.

O complexo rz é o transformado de z pela *homotetia* de centro na origem e razão (ou fator) r. Deste modo, a construção de rz é imediata no Cabri.
É interessante explorar, no cabri, os casos $r>0$, $r<0$ e $r=0$, bem como $|r|>1$, $|r|=1$ e $|r|<1$.

5. Unitários, Argumento, Forma Trigonométrica

Sendo z um complexo não nulo (isto é, diferente de $(0;0)$), o complexo $z/|\,z\,|$ tem módulo 1. Se pensado como vetor, $z/|\,z\,|$ tem a mesma direção e sentido que z. Se pensado como ponto, está na semi-reta de origem $(0;0)$ e que contém z.
Qualquer complexo de módulo 1 é chamado **unitário**. Dado um complexo não nulo z, o complexo $z/|\,z\,|$ é o **unitário de** z.
Construir o unitário de um complexo z no Cabri não apresenta dificuldade. Não é necessário mostrar os eixos. Basta que sejam dados os complexos (pontos) $(0;0)$ e $(1;0)$. A interseção do círculo de centro na origem e raio 1 com a semi-reta de origem $(0;0)$ e que contém z, dá o unitário. É bom preparar uma macro para essa construção.
Todo complexo unitário pertence ao círculo de centro na origem e raio 1, e portanto é da forma $(\cos\theta;\operatorname{sen}\theta)$. A este ângulo θ se chama um **argumento** de z. Qualquer

outro ângulo da forma $\theta + 2k\pi$ (em radianos) é também um argumento do mesmo z. Para todo complexo não nulo z, pode-se portanto escrever: $\dfrac{z}{|\,z\,|} = (\cos\theta; \operatorname{sen}\theta)$ ou $z = |\,z\,|\,(\cos\theta; \operatorname{sen}\theta) = (\,|\,z\,|\cos\theta;\ |\,z\,|\operatorname{sen}\theta)$, onde θ é um argumento de z. Cada uma destas expressões é chamada **forma trigonométrica** ou **forma polar** do número complexo z.

No Cabri, mostrando os eixos, criando um complexo z e investigando como fazer Cabri determinar seu argumento e sua forma trigonométrica, constata-se uma dificuldade, que vem da maneira pela qual Cabri mede ângulos. O natural seria mandar medir o ângulo definido pelos pontos $(1; 0)$, $(0; 0)$ e z. O leitor observará que isto não vai funcionar quando z estiver no terceiro ou quarto quadrantes. Uma solução seria usar coordenadas polares (em Opções— Preferências), que dá um argumento correto em todos os casos, mas, dentro de problemas onde a determinação de um argumento é apenas uma etapa, esta alternância de sistemas de coordenadas nem sempre é conveniente. Em cada situação concreta, porém, há sempre uma maneira de contornar a questão, como veremos.

6. Multiplicação de complexos

Cada complexo unitário $(\cos\alpha; \operatorname{sen}\alpha)$ define uma rotação de centro na origem, de amplitude α. Por definição, multiplicar dois complexos unitários equivale a compor as rotações que eles definem, isto é, somar seus ângulos. Portanto, o produto de dois complexos unitários é um novo complexo unitário cujo argumento é a soma dos argumentos dos dois fatores:

$(\cos\alpha; \operatorname{sen}\alpha) \cdot (\cos\beta; \operatorname{sen}\beta) = (\cos(\alpha+\beta); \operatorname{sen}(\alpha+\beta)) =$

$(\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta; \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta)$

Em termos algébricos, a definição de produto de complexos unitários equivale, portanto, à fórmula: $(a; b) \cdot (c; d) = (ac - bd; ad + bc)$.

Por outro lado, o produto de dois complexos não nulos quaisquer z e w se obtém, por definição, multiplicando seus módulos e seus unitários. Assim, o módulo do produto zw é o produto dos módulos de cada fator, e o unitário do produto zw é o produto dos unitários dos fatores z e w. Sendo então $z = |\,z\,|\,(\cos\alpha; \operatorname{sen}\alpha)$ e $w = |\,w\,|\,(\cos\beta; \operatorname{sen}\beta)$, tem-se, por definição: $zw = |\,zw\,| \cdot (\text{unitário de } zw) = |\,z\,|\ |\,w\,| \cdot [(\text{unitário de } z) \cdot (\text{unitário de } w)] = |\,z\,|\ |\,w\,|\,(\cos\alpha; \operatorname{sen}\alpha) \cdot (\cos\beta); \operatorname{sen}\beta) = |\,z\,|\ |\,w\,|\,(\cos(\alpha+\beta); \operatorname{sen}(\alpha+\beta))$

Em palavras: o módulo do produto é o produto dos módulos dos fatores, e um argumento do produto é a soma dos argumentos dos fatores.

Em termos algébricos, se $z = (a; b)$ e $w = (c; d)$, teremos:

$zw = |\,z\,|\,|\,w\,| \left[\left(\dfrac{a}{|\,z\,|}; \dfrac{b}{|\,z\,|}\right) \cdot \left(\dfrac{c}{|\,w\,|}; \dfrac{d}{|\,w\,|}\right)\right] = |\,z\,|\,|\,w\,| \left(\dfrac{ac - bd}{|\,z\,|\,|\,w\,|}; \dfrac{ad + bc}{|\,z\,|\,|\,w\,|}\right)$
$= (ac - bd; ad + bc)$

Esta expressão, válida inicialmente para unitários, vale também para quaisquer complexos não nulos. Por isto, vamos tomá-la como a **definição geral do produto** de dois complexos (inclusive se um deles for nulo, ou ambos o forem):

Definição: O produto de dois complexos quaisquer é definido por:

$$(a; b) \cdot (c; d) = (ac - bd; ad + bc)$$

Pode-se verificar algebricamente que a multiplicação de complexos é comutativa, associativa e distributiva em relação à adição. O fato de que a multiplicação de complexos não nulos equivale a multiplicar os módulos e somar os argumentos dos fatores, sugere que $(1; 0)$, que tem módulo 1 e argumento zero, seja o elemento neutro para a multiplicação. E de fato, isto pode ser verificado pela definição geral.

A partir da própria definição, parece fácil fazer uma macro no Cabri para multiplicar os complexos z e w dados. Basta mostrar os eixos, pedir as coordenadas de z e w, usar a calculadora, transferir as coordenadas do produto para os respectivos eixos ("Transferência de Medidas" respeita sinais) e construir o ponto pertinente. Há, porém, alguns incovenientes: o primeiro deles é que esta macro não se aplica quando $z = w$ (isto pode ser contornado, mas não vale a pena). Outro inconveniente é que, como já foi dito, a presença dos eixos pode ser indesejada em certos problemas. Mais adiante, proporemos uma alternativa para construir o produto de complexos em Cabri (e fazer a respectiva macro), sem usar eixos nem coordenadas.

7. Conjugado, inverso e quociente

Sendo $z = (a; b)$, o complexo $\overline{z} = (a; -b)$ se chama o **conjugado** de $(a; b)$. Geometricamente $\overline{z}$ é o simétrico de z em relação ao eixo X. Por isto, sua construção não apresenta problemas em Cabri. É só usar a transformação Simetria Ortogonal.

É imediato verificar que $|\overline{z}| = |z|$ e que se θ for um argumento de z, então $-\theta$ é um argumento de $\overline{z}$.

O complexo nulo $(0; 0)$ não tem inverso multiplicativo, já que seu produto por qualquer outro complexo dá $(0; 0)$, não podendo dar $(1; 0)$. Se, porém, z for um complexo não nulo, com argumento θ, e w o complexo que tem módulo $1/|z|$ e argumento $-\theta$, é claro que zw

tem argumento 1 e argumento zero, ou seja $zw = (1;0)$ e, portanto, w é o inverso de z para a multiplicação. Chamaremos $w = 1/z$. Pelo exposto, $|z|^2 w$ tem módulo $|z|$ e argumento $-\theta$, ou seja, é o conjugado de z. Logo: $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Para construir, pois, o inverso de um complexo não nulo z no Cabri, pode-se construir primeiro seu conjugado $\overline{z}$. Em seguida, pode-se medir o módulo de z, usar a calculadora para calcular $r = 1/|z|^2$ e obter $1/z$ como o transformado de $\overline{z}$ pela homotetia de centro na origem e razão r (uma alternativa sem usar medidas seria usar o Teorema de Tales). Observe que, seguindo esta construção, uma macro para construir o inverso não necessita dos eixos; os dados são: $(0;0)$, $(1;0)$ e z.

Pode-se também, no Cabri, construir o inverso de um complexo de uma maneira bem rápida, utilizando a transformação "Inversão". De um modo geral, a inversão em relação a uma circunferência K de centro O é a transformação que a cada ponto P (distinto de O) associa o ponto P' situado na semi-reta OP e tal que $|\overrightarrow{OP'}|\,|\overrightarrow{OP}| = R^2$, onde R é o raio de K. Portanto, no plano complexo, a inversão em relação à circunferência unitária (de centro na origem e raio 1) transforma o complexo não nulo z em $1/\overline{z}$, ou seja, transforma $\overline{z}$ em $1/z$. Conclusão: dados $(0;0)$, $(1;0)$ e z, constrói-se a circunferência de centro $(0;0)$ que passa por $(1;0)$, acha-se o conjugado de z (simétrico em relação à reta que passa por $(0;0)$, $(1;0)$), e determina-se o transformado de $\overline{z}$ pela inversão em relação à circunferência unitária.

O **quociente** $\dfrac{z}{w}$ de complexos (sendo $w \neq 0$) é definido como o produto de z pelo inverso de w. Portanto, $\dfrac{z}{w} = \dfrac{z\overline{w}}{|\,w\,|^2}$. Em Cabri, uma macro para construir o quociente de dois complexos pode basear-se nas macros anteriores para produto e inverso.

8. Os complexos como extensão dos reais e o número i

No conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos, já definimos as operações de adição e multiplicação, de acordo com as regras: $(a;b)+(c;d) = (a+b;c+d)$ e $(a;b)\cdot(c;d) = (ac-bd;ad+bc)$. Pode-se verificar que estas operações possuem as seguintes propriedades: são associativas e comutativas; a multiplicação é distributiva em relação à adição; $(0;0)$ é neutro para a adição, $(1;0)$ é neutro para a multiplicação; todo complexo $z = (a;b)$ tem simétrico $-z = (-a;-b)$ para a adição e, se for não nulo, tem inverso para a multiplicação $1/z = \overline{z}/|\,z\,|^2$. Na linguagem da álgebra, isto significa que $\mathbb{C},+,.$ é um corpo.

Se considerarmos agora os complexos situados no eixo X, isto é, os da forma $(x;0)$, pelas definições das operações, temos:
$(a;0)+(b;0)=(a+b;0+0)=(a+b;0)$ e $(a;0)\cdot(b;0)=(ab-0;0a+0b)=(ab;0)$.

Daí se vê que: (i) o eixo X é fechado para as operações de adição e multiplicação de complexos; (ii) os neutros $(0;0)$ e $(1;0)$ pertencem ao eixo X; (iii) o simétrico $(-a;0)$ do complexo $(a;0)$ do eixo X continua pertencendo ao eixo X; (iv) o inverso $(1/a;0)$ do complexo não nulo $(a;0)$ do eixo X continua pertencendo ao eixo X.
Ou seja, o eixo X é um subcorpo de $\mathbb{C}$.

Além disto, se $f:X\to\mathbf{R}$ for a função definida por $f(a;0)=a$, então f é uma bijeção de X sobre $\mathbf{R}$ tal que: $f(z+w)=f(z)+f(w)$ e $f(zw)=f(z)f(w)$, ou seja, f é um isomorfismo do corpo X sobre o corpo $\mathbf{R}$. Ou ainda: X e $\mathbf{R}$ são isomorfos através da correspondência $(a;0)\leftrightarrow a$. Isto significa que o eixo X é, algebricamente, **uma cópia perfeita do corpo dos reais**, por isto mesmo chamada de **eixo real**. Em vez de dizer "$\mathbb{C}$ contém uma cópia perfeita de $\mathbf{R}$", diz-se, por abuso de linguagem: **$\mathbb{C}$ contém $\mathbf{R}$**, isto é, põe-se a cópia no lugar do original. Com isto, identificamos o eixo X com $\mathbf{R}$ e, conseqüentemente, de agora em diante, o complexo $(a;0)$ passa a ser identificado com o real a. Por exemplo: $2+(3;1)$ significa, na verdade, $(2;0)+(3;1)=(5;1)$. Por outro lado, sendo $a,b,c\in\mathbf{R}$, a operação $a\cdot(b;c)$ pode agora ser interpretada de duas maneiras: como o produto de um número real por um complexo, ou como o produto do complexo $(a;0)$ por $(b;c)$. Felizmente, essas duas interpretações são coerentes, ambas resultando em $(ab;ac)$.
Com a identificação $(a;0)=a$, obtém-se, em particular, $(0;0)=0$ e $(1;0)=1$, ou seja, os neutros da adição e da multiplicação de complexos são, felizmente, os mesmos dos reais.

O número i é definido como: $i=(0;1)$, ou seja, é o complexo de módulo 1 e argumento $\pi/2$. Portanto, multiplicar um complexo por i significa girá-lo de um ângulo reto (positivo). Em particular, i^2 tem módulo 1 e argumento π, isto é: $i^2=(-1;0)=-1$, como também pode ser verificado diretamente pela definição da multiplicação. Por outro lado, para qualquer complexo $(a;b)=(a;0)+(0;b)=a\,(1;0)+b\,(0;1)=a+bi$.

Aqui recuperamos aquilo que às vezes é tomado como definição de número complexo: todo número complexo $(a;b)$ pode ser escrito como $(a;b)=a+bi$, onde $i^2=-1$. Esta é a chamada **forma algébrica** do número complexo $(a;b)$, muito útil para deduzir e utilizar diversas propriedades do corpo dos complexos.

Por razões históricas, usam-se os seguintes nomes: eixo X = eixo real; eixo Y = eixo imaginário; $a = \mathrm{Re}\,(a+bi)$ = parte real do complexo $a+bi$; $b = \mathrm{Im}\,(a+bi)$ = parte imaginária do complexo $a+bi$. Um complexo da forma bi (onde $b \in \mathbf{R}$) é dito um "imaginário puro".

9. Macro para o Produto de Complexos

A seguir, propomos uma alternativa para construir o produto de complexos em Cabri (e fazer a respectiva macro), sem usar eixos nem coordenadas.

Primeiramente, dados os complexos 0, 1 e z, constrói-se o segmento $0z$; acha-se o ponto v, unitário de z. O simétrico de v em relação a $0z$ é v^2. Agora, uma homotetia de razão $|z|^2$ transforma v^2 em z^2. Com isto, já se tem a construção do quadrado de um complexo, e pode-se fazer uma macro correspondente.

Dados agora os complexos 0, 1, z e w, constrói-se zw utilizando o fato de que $zw = \dfrac{(z+w)^2-(z-w)^2}{4}$, e as macros anteriores para soma, diferença, quadrado de complexos, e homotetia.

10. O Teorema Fundamental da Álgebra

Como foi dito na Introdução, os números complexos nasceram em um contexto de resolução de **equações polinomiais** (também chamadas equações algébricas). Inicialmente, sua grande utilidade foi possibilitar a determinação de raízes de equações polinomiais com coeficientes reais, cuja resolução era impossível permanecendo apenas dentro dos reais. Este é um exemplo de um procedimento típico em Matemática: elevar-se a um contexto mais amplo, onde as coisas aparecem mais claras. Algo análogo ocorre quando temos que nos limitar aos racionais, onde equações tão simples quanto $x^2 = 2$ já oferecem problema. Pois bem, agora temos os complexos, que englobam os reais, e são muito mais "perfeitos" que os reais, em termos de soluções de equações . Basta ver o exemplo da equação $x^2+1 = 0$, que não tem solução real (pois em $\mathbf{R}$, um quadrado não pode ser negativo), e tem solução i em $\mathbb{C}$. Será que, no conjunto dos complexos, haverá também alguma equação polinomial que não tenha solução? A resposta é não, como mostra o **Teorema Fundamental da Álgebra:** No conjunto dos números complexos, toda equação polinomial (de grau positivo) tem solução.

Este teorema, embora já fosse conhecido e utilizado antes, foi demonstrado por Gauss, em sua tese de doutorado, quando tinha 22 anos, em 1799. Apesar de se chamar Teorema Fundamental da Álgebra, sua demonstração envolve conceitos de Análise (como a noção de continuidade) e, por isto, é sempre relegada aos cursos superiores mais avançados.

No entanto, a geometria dinâmica permite visualizar este teorema de modo admirável. A idéia apresentada a seguir provém de uma palestra proferida na Argentina por Jean-Marie Laborde, criador do Cabri. A ilustração será feita com um polinômio do terceiro grau, mas o leitor pode perceber que a idéia seria a mesma para qualquer outro grau.

Um polinômio genérico do terceiro grau é da forma $p(z) = c_3z^3 + c_2z^2 + c_1z + c_0$, onde $c_3 \neq 0$. Suas raízes são as raízes da equação $p(z) = c_3z^3+c_2z^2+c_1z+c_0 = 0$, onde podemos dividir ambos os membros por c_3 ou, de modo equivalente, supor $c_3 = 1$. Pode-se também verificar que, fazendo em $p(z) = z^3 + c_2z^2 + c_1z + c_0$ a mudança de variável $z = w - \dfrac{c_2}{3}$, o polinômio resultante em w não tem termo em w^2 e tem raízes se e só se $p(z)$ o tem, de modo que podemos supor também $c_2 = 0$. Por isto, não há perda de generalidade em trabalhar com $p(z) = z^3 + c_1z + c_0$. Vamos supor $c_0 \neq 0$, já que se $c_0 = 0$, é evidente que 0 seria raiz de $p(z)$.

Fixados os complexos 0, 1 c_1, c_2 e z, como já temos macros para soma e produto, não há dificuldade em construir $p(z)$. É útil construir os vetores que vão da origem a z e a $p(z)$. Pode-se agora fazer variar tanto z como os coeficientes c_1 e c_2, e observar o comportamento de $p(z)$.

Mais instrutivo ainda é criar agora uma circunferência K de centro na origem e de raio arbitrário, e medir o seu raio r. Utilizando "Redefinir objeto", redefina z como um ponto de K. Peça o Lugar Geométrico de $p(z)$ quando z varia. Agora temos a imagem de K por $p(z)$ no plano complexo (vamos chamá-la de $p(K)$). É interessante variar o raio de K, bem como animar z e observar o que se passa com $p(K)$.

Observe que quando r se aproxima de 0, a curva $p(K)$ se enrosca entorno de c_0. Isto ilustra a continuidade de p em 0, ou seja, o fato de que $\lim_{z \to 0} p(z) = p(0) = c_0$.

Observe que quando $r = |z|$ começa a aumentar suficientemente a partir do valor $r = 0$, a curva $p(K)$ começa a fazer laços em torno da origem. Na realidade, animando z, pode-se observar que o vetor $p(z)$ tem uma velocidade aproximadamente tripla do vetor z, dando três voltas em torno da origem, enquanto z dá uma. Isto traduz o fato de que quando r tende a infinito, $p(z)$ se comporta aproximadamente como z^3, que tem argumento triplo do de z.

Recapitulando: quando r se aproxima de 0, a curva $p(K)$ se enrosca entorno de c_0 (suposto diferente de zero, é bom lembrar). Quando r aumenta suficientemente, $p(K)$ faz laços em torno da origem. Em particular, se não houver "sobressaltos", $p(z)$ tem que passar pela origem. Quando isto ocorrer, teremos $p(z) = 0$, isto é, o correspondente z é uma raiz de $p(z)$. Na realidade, na grande maioria dos casos, $p(z)$ passará pela origem três vezes, fornecendo as três raízes de $p(z)$. Pode-se calcular aproximadamente essas raízes, pedindo as coordenadas de z.

O que foi feito aqui é muito semelhante ao argumento usado em uma das demonstrações de Gauss do Teorema Fundamental da Álgebra. Só que Gauss não tinha computador nem Cabri.

Bibliografia:

Carneiro, J.P., Números Complejos - Abordaje Geométrico - y Ecuaciones Polinomiales - XX Jornadas de Resolución de Problemas; Seminario Internacional - San Carlos de Bariloche - Rio Negro - Argentina - 1997

Carneiro, J.P., Resolução de Equações Algébricas, Ed. Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro, 1998

Carneiro, J.P., Los Números Complejos en la Isla del Tesoro - Actas del III CIBEM - Memorias III Congreso Iberoamericano de Educación Matemtica - Universidad Central de Venezuela - Caracas - 1998

Carneiro, J.P., Aplicaciones geométricas de los Números Complejos - con Cabri - XXV Jornadas de Resolución de Problemas; Seminario Internacional - San Martin de los Andes - Argentina - 2000

Hahn, Liang-shin, Complex Numbers and Geometry, MAA Books, 1994

Schwedtfeger, H., Geometry of Complex Numbers, Dover, 1979