

NAVEGANDO PELA

MATEMÁTICA CONTEMPORÂNEA:

*uma abordagem superficial e incompleta
da pesquisa em Matemática*

Claus Haetinger

e-mail: chaet@fates.tche.br

26 de Outubro de 2001

1. A Matemática é criada ou descoberta? Ela controla o mundo?
2. A Álgebra é Matemática? Ela é descoberta ou inventada?
3. A Matemática pode ser criada a partir dela mesma? Para onde ela vai?
4. Que problemas ainda não estão resolvidos?
5. O que faz (ou poderia fazer) um matemático quando não está dando aula?
6. A Matemática e seus métodos são exatos, corretos, livres de contradições?

Sumário

1. Motivação
2. Ramos e Divisões da Matemática
3. A Matemática no Mundo Atual
4. A Pesquisa em Matemática
5. O Pensamento Matemático
6. A Matemática no Brasil
7. Os Grandes Problemas em Aberto

1 Motivação

“A beleza da Matemática está no fato de que, embora a inventemos, parece que descobrimos algo que já existe”.

R. Kaplan

The nothing that is: a natural history of zero

<http://www.oup-usa.org/sc/0195128427>

“Deus criou os números inteiros, todo o resto é obra do Homem”.

L. Krönecker

“A série é divergente; então nós devemos poder fazer algo com isto”.

O. Heaviside

“A função de um perito não é ser mais certo que as outras pessoas, mas estar errado por razões mais sofisticadas”.

D. Butler

“A quantidade de questões que não sabemos responder é monstruosamente maior do que o número de resultados estabelecidos”.

O mercado de trabalho para pesquisadores em Matemática e para docentes de nível superior em Matemática é extremamente carente de profissionais.

O salário de um pesquisador em Matemática no Brasil varia de $R\$ 3.000,00$ a $R\$ 7.000,00$, podendo chegar a valores bem maiores conforme a produtividade e os interesses do mercado.

2 Ramos e Divisões da Matemática

Podemos dividir a Matemática em três grandes áreas centrais:

- Matemática Pura (SBM)
- Matemática Aplicada (SBMAC)
- Educação Matemática (SBEM)

Cada uma delas pode dividir-se em inúmeras subáreas.

Por exemplo, a Educação Matemática divide-se em:

- História da Matemática
- Epistemologia
- Filosofia
- Ensino
- Etnomatemática
- ⋮

Já a Matemática Aplicada divide-se em:

- Matemática Aplicada a áreas específicas (Física, Medicina, Engenharia, Biologia, etc.)
- Matemática Discreta (Teoria dos Grafos, Reticulados, Álgebras Booleanas, Criptografia, Combinatória Algébrica)
- Computação (Algébrica, Gráfica)
- Mecânica de Fluidos (Métodos Analíticos e Numéricos em Dinâmica de Fluidos)
- Teoria dos Transportes e Transformadas Integrais

- Algoritmos e Complexidade
- Algoritmos Numéricos e Algébricos
- Modelagem Matemática
- Otimização
- Pesquisa Operacional
- Sistemas Não Lineares e Ecologia
- Vibrações, Controle e Sinais
- ∴

A Matemática Pura subdivide-se em:

- Estatística (Probabilidade, Processos Estocásticos - movimento browniano, medida de Wiener, sistemas gaussianos; Equações Diferenciais Estocásticas, Séries Temporais, Processos Estocásticos de Longa Dependência)
- Análise (EDO, EDP, Análise Funcional, Espaços Métricos, Medida e Integração, Métodos Probabilísticos em EDP, Variedades)
- Topologia (Topologia Algébrica, Teoria Ergódica, Singularidades de Aplicações Analíticas)

- Física Matemática (Mecânica Conservativa, Formalismo Termodinâmico, Aplicações de Grupos de Lie à Física, Relatividade)
- Álgebra (Álgebra Comutativa X Não Comutativa, Teoria de Anéis, Análise p -Ádica, Teoria de Grupos, Teoria de Representações de Álgebras, Teoria de Galois, Álgebra Linear, Álgebras de Hopf, Álgebras de Lie)
- Geometria (Diferencial, Riemanniana, Hiperbólica, Algébrica)
- Sistemas Dinâmicos (Teoria do Caos, Fractais, Buracos Negros, Atratores de Lorentz)

- Métodos Matemáticos (Mecânica Newtoniana, Lagrangiana, Hamiltoniana; Princípios Variacionais, Teoria das Oscilações Não Lineares)
- Teoria de Números (Análise Numérica)
- Lógica
- Matemática Discreta (Combinatória Algébrica, Teoria dos Jogos)
- ∴

3 Matemática no Mundo tual

O mundo em que vivemos hoje, embora não nos apercebamos, depende fundamentalmente da Matemática.

As ondas eletromagnéticas para a TV e a informação telefônica via satélite tiveram sua existência primeiramente descoberta na Matemática, depois na Física.

Os aspectos teóricos da computação foram desenvolvidos por matemáticos como J. von Neumann e A. Turing.

O desenvolvimento de um motor, de um circuito elétrico ou de um “*chip*” de computador necessita de uma enorme quantidade de cálculos matemáticos e de Teorias Matemáticas, assim como a maioria dos aparelhos elétricos.

A era industrial só foi possível devido ao desenvolvimento da Física e da Matemática por Newton, Lagrange, Fourier, Cauchy, Gauss e outros cientistas.

Os conjuntos fractais surgem nos trabalhos dos matemáticos Hausdorff e Besikovich, e depois foram popularizados por B. Mandelbrot.

As figuras que aparecem na Enciclopédia Encarta da Microsoft são feitas por compactificação de imagens obtidas por adaptação de idéias matemáticas de auto-similaridade de fractais do matemático M. Barnsley.

A explicação física do fenômeno da água se tornar gelo a zero graus e da magnetização de objetos a baixas temperaturas, exige aplicação da Teoria Matemática da Probabilidade. Esta Teoria, no início, dedicava-se apenas a calcular chances de ganhar ou perder nos jogos de roleta. Isto antes de penetrar na Mecânica Estatística e Quântica como ferramenta insubstituível.

Convém lembrar que o matemático W. Gibbs foi um dos cientistas que estabeleceu os princípios da Mecânica Estatística.

O entendimento da Teoria da Relatividade de Einstein e dos “buracos negros” de S. Hawking deve muito ao desenvolvimento das Geometrias Não Euclidianas (Axioma das Paralelas de Euclides - século IV a.C.) por Gauss, Riemann e Poincaré.

A questão, se era ou não possível deduzir o Axioma das Paralelas a partir de outros, se estendeu por mais de 20 séculos até ser negado por Lobachewski no século XIX.

Surgem as Geometrias Riemanniana e Hiperbólica.

O fenômeno de que a luz tinha velocidade constante independente do referencial do observador que a media, apontava para a direção de que o espaço-tempo deveria ter alguma curvatura. Einstein, que aprendeu a Geometria Riemanniana, encontrou um modelo matemático para o fenômeno em questão, através de uma Geometria Não Euclidiana conveniente.

Várias Teorias Matemáticas resultaram, posteriormente, em ferramentas para o entendimento de modelos das Ciências Naturais com os quais a princípio não pareciam ter nenhum relacionamento.

Os números complexos, introduzidos para dar sentido à existência de soluções de equações polinomiais, conduziram ao estudo do cálculo diferencial com números complexos. Esta Teoria resultou ser, posteriormente, extremamente útil para explicar o escoamento de fluidos incompressíveis.

A teoria de S. Hawking para explicar os “buracos negros” necessita de resultados envolvendo números complexos e Mecânica Quântica (logo, requer resultados da Teoria da Probabilidade).

A formalização da Mecânica Quântica só foi possível via a fundamentação dada pelo matemático J. von Neumann, utilizando a teoria de espaços de funções desenvolvidas em grande parte pelo matemático D. Hilbert, que jamais imaginaria que sua teoria matemática do começo do século XX iria se aplicar a tal assunto.

A Teoria matemática das “*wavelets*”, desenvolvida principalmente por volta de 1970, permitiu consideráveis avanços em tomografia computadorizada.

Os livros-textos de Biologia, Economia, Agronomia, etc, usados nas Universidades hoje em dia, contêm muito mais fórmulas matemáticas e estatísticas que os usados 20 anos atrás.

A tendência de todas as Ciências é cada vez mais se “matematizarem” em função do desenvolvimento de Modelos Matemáticos que descrevem fenômenos (determinísticos ou aleatórios) naturais de maneira adequada.

O ritmo intenso do desenvolvimento tecnológico dos tempos atuais produz o seguinte fenômeno: é cada vez menor o tempo decorrente entre o desenvolvimento de uma teoria matemática e sua utilização prática.

Nas Ciências Sociais, a Estatística é, hoje em dia, ferramenta extremamente útil para qualquer profissional da área. Até para investir na bolsa de valores existem teorias matemáticas e probabilísticas que possibilitam maximizar o lucro auferido.

Em resumo, podemos afirmar que o domínio do uso da Matemática, hoje em dia, é uma condição necessária para o sucesso em uma quantidade enorme de profissões. As projeções para o futuro próximo indicam que esta tendência deve se intensificar.

Para os Estados Unidos projeta-se que já no começo do século XXI os “*white-collars*”^a serão em maior número do que os “*blue-collars*”^b. A automação e o computador produzirão também a ocorrência do mesmo fenômeno no resto do mundo em um futuro razoavelmente próximo.

^atrabalhadores que precisam de algum estudo de nível superior

^btrabalhadores braçais

Na maioria dos programas de nível superior nos Estados Unidos, o estudante deve fazer algum curso de Matemática.

Numa sociedade moderna em que a “eficiência” é um dos objetivos maiores, maximizar benefícios e minimizar perdas é essencial. Nestes casos, invariavelmente, algum modelo matemático deve entrar em jogo.

Agora, que acreditamos ter conscientizado o público da importância da Matemática no mundo atual, vamos falar um pouco sobre a Matemática e os profissionais que atuam nesta área.

4 Pesquisa em Matemática

Muitas vezes é desconhecido do cidadão comum que a Matemática é uma Ciência viva e que um intenso trabalho de pesquisa é desenvolvido hoje em dia nesta área.

“Nos últimos trinta anos a quantidade de páginas escritas de trabalhos publicados em Matemática é maior do que o número de páginas escritas sobre Matemática desde a Grécia antiga até a trinta anos atrás”. A. Odlyzko, do “AT & T Bell Laboratories”

Muitas razões concorrem para o desconhecimento da pesquisa em Matemática.

A primeira delas é que por sua própria natureza, um resultado matemático usa outros resultados anteriores e assim por diante de tal modo que é difícil descrever para um leigo a importância dos resultados obtidos pelos matemáticos atuais. Sendo assim, o cidadão comum não tem em geral conhecimento da pesquisa em Matemática atual.

Convém também lembrar que a Matemática que se aprende hoje no ensino médio e no ensino superior, que se aplica numa enorme quantidade de situações práticas, foi considerada pesquisa Matemática algum tempo atrás.

A segunda razão, talvez seja o fato de que não existe um Prêmio Nobel em Matemática. A. Nobel (1833-1896) foi um cientista sueco que criou uma fundação que anualmente premia cientistas de várias áreas do conhecimento como Física, Química, Medicina, Literatura, etc. Como não existe um Prêmio Nobel em Matemática, muitos pensam erradamente que não existe pesquisa atual nesta área.

O Prêmio correspondente ao Prêmio Nobel, na área da Matemática é a Medalha Fields que é outorgada pela “*International Mathematical Union*” a cada 4 anos a 4 matemáticos distinguidos que tenham menos de 40 anos de idade.

Recentemente o matemático francês J.C. Yoccoz da Universidade de Paris-Sud recebeu este prêmio. Este matemático passou grande parte de sua vida no Brasil trabalhando e desenvolvendo pesquisas matemáticas junto com pesquisadores brasileiros.

Intenso trabalho de pesquisa se realiza hoje nas áreas centrais da Matemática.

Os Fractais, os Sistemas Caóticos, *Cellular Automata*, a Teoria das Catástrofes, a Geometria das Variedades Mínimas, as Aplicações da Topologia Algébrica a problemas de Mecânica Quântica, a Teoria das “*wavelets*”, as Aplicações Matemáticas à Teoria da Computação são alguns dos tópicos que mais se popularizaram.

Outros igualmente importantes e profundos estão sendo desenvolvidos por matemáticos, embora seja difícil de explicar sua importância para leigos.

Nada impede que estes tópicos passem de uma hora para outra a serem mencionados em periódicos de maior divulgação no momento em que alguém encontre um modelo real em que tais teorias possam ser aplicadas.

Recentemente um matemático inglês resolveu a celebrada conjectura de Fermat.

A conjectura de Riemann acerca dos zeros de uma certa função é a questão ainda não resolvida mais famosa da Matemática atual. Uma série de outras questões importantes em Geometria, Análise, Álgebra e em Mecânica Quântica seriam matematicamente resolvidas se tal conjectura fosse verdadeira.

Ricardo Mañé (1948-1995), um matemático trabalhando no IMPA (Rio de Janeiro), resolveu em 1987 a conjectura da estabilidade estrutural que é considerada um dos resultados mais importantes da Teoria dos Sistemas Caóticos.

Celso Costa em sua tese de doutorado no IMPA (Rio de Janeiro), exibiu em 1982 um exemplo de uma superfície mínima com certas propriedades especiais. Este exemplo responde negativamente a uma conjectura também famosa. Esta superfície, que é conhecida no mundo inteiro como a superfície de Costa, foi inspirada, segundo o autor, por um chapéu de um passista de uma escola de samba do Rio de Janeiro.

5 O Pensamento Matemático

O Universo dos problemas matemáticos os quais não temos a menor idéia de como resolvê-los é inesgotável. Ao mesmo tempo, a toda hora, as Ciências Naturais, colaborando com a Matemática, sugerem uma série de novos problemas matemáticos cuja solução é relevante e ainda desconhecida.

O matemático desenvolve a Teoria Matemática através da sua intuição do que é fundamental e profundo em Matemática. A Matemática é fundamentalmente “resolução de problemas matemáticos”.

O eminente botânico Sir D'Arcy Thompson disse uma vez que tudo o que é belo em Matemática, mais cedo ou mais tarde será de importância em algum fenômeno natural.

Quando um matemático encontra a solução para algum problema matemático e este resultado lhe parece interessante, ele quer que seus colegas o apreciem.

O fruto deste trabalho é então publicado em uma revista de Matemática de circulação internacional (*“paper”*).

Posteriormente, alguns destes resultados (em geral que têm maior profundidade do ponto de vista matemático) passam a ser utilizados por cientistas de outras áreas mais aplicadas.

A Matemática, num certo sentido, é uma arte. A análise e a engenhosidade na obtenção da solução de um problema matemático possui um valor estético intrínseco. Uma série de resultados se encaixam “magicamente” num resultado final que, ou surpreende, ou encanta, ou nos coloca uma pulga atrás da orelha: será que isto é mesmo verdade?

A demonstração matemática é enfim o que vai precisar se o resultado está certo ou errado.

A demonstração em Matemática desempenha o papel que a experiência desempenha na Física. É ela o referencial da veracidade ou não do resultado matemático.

Cumprе destacar que para um profissional que vai apenas utilizar uma técnica matemática, nem sempre a apresentação de uma demonstração matemática pode ser elucidativa. Acima estamos falando da Matemática em si e não na sua aplicação em um ramo específico do conhecimento.

Muitas vezes, quando se precisa utilizar uma certa técnica, a situação real não é bem igual ao que se aprendeu na universidade. É necessário fazer pequenos ajustes no modelo que foi ensinado. Neste momento, entender o resultado matemático (e algumas vezes até a sua demonstração) pode ser de grande utilidade.

Exatamente devido a sua prova matemática, um resultado matemático é eterno. É válido hoje como também o será daqui a milhares de anos; ou seja, assumidas certas hipóteses, segue da prova matemática que tais e tais propriedades são válidas.

6 Matemática no Brasil

Vai muito bem, obrigado!

A “*International Mathematical Union*” que classifica os países por “*ranking*” de desenvolvimento de pesquisa em Matemática coloca o Brasil em nível de países do primeiro mundo como Holanda, Suécia, Bélgica, etc.

Em algumas áreas como Sistemas Dinâmicos e Geometria o Brasil possui alguns dos melhores centros mundiais de pesquisa no assunto. Matemáticos brasileiros participam de congressos no exterior e publicam trabalhos de pesquisa nas melhores revistas matemáticas do mundo.

As dimensões geográficas e populacionais do Brasil no entanto são gigantescas. O número de pesquisadores em Matemática é ainda muito pequeno em comparação com a população do país.

A profissão de professor de Matemática atuando em nível superior (nas universidades é onde se desenvolve a pesquisa em Matemática no Brasil) é uma das poucas profissões atualmente no Brasil, em que a demanda é muito maior que a oferta de profissionais.

Muitas pessoas pensam que a Matemática é difícil e por isso os cursos de Bacharelado em Matemática não são muito procurados.

Poucos sabem que as possibilidades de um bom emprego nesta área, para estudantes bem qualificados, são enormes.

Muitos bons estudantes dos cursos de Matemática recebem bolsas de estudo do CNPq nos cursos de graduação, mestrado e doutorado no Brasil e no exterior.

O salário de um professor universitário, em universidade particular, com doutoramento e que desenvolva trabalho de pesquisa (e receba uma complementação por trabalho de pesquisa do CNPq) pode ultrapassar os R\$ 10.000,00.

Diferentemente de empregos na iniciativa privada, que em geral estão associados a projetos específicos e de utilização mais imediata, um pesquisador desfruta de liberdade para criar e de dar asas, sem limite, a sua imaginação e criatividade (contanto que produza pesquisa de ótima qualidade).

Em resumo, se você gosta de Matemática, considere a possibilidade de se tornar um pesquisador em Matemática. Pense no assunto!

7 Os Grandes Problemas em berto

A conjectura (provavelmente) mais antiga, proposta por Euclides:

Conjectura 7.1 *Existe um número perfeito ímpar.*

www.utm.edu/research/primes/mersene.shtml#unknown

A Hipótese de Riemann:

Muitos teoremas estão provados a menos desta hipótese.

Expor este problema requer boa familiarização com análise complexa, o que dificulta a exposição aqui. Porém, há um artigo de G. Garbi (RPM 42, pg. 32-39), e dois de G. Ávila (RMU 3, pg. 51-60; e RMU 19, pg. 55-63), com as idéias iniciais para o nascimento da função ζ , mostrando como Euler explorou a série harmônica para obter resultados sobre a distribuição dos números primos.

Num artigo publicado em 1859, Riemann obteve uma fórmula que relaciona números primos menores do que um dado número real com zeros da função ζ . Em seus estudos sobre a série harmônica, Euler definiu a função ζ através da série

$$\zeta(x) = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{5^x} + \frac{1}{6^x} + \dots$$

Conjectura 7.2 *Os zeros não triviais da função ζ têm parte real igual a $\frac{1}{2}$.*

O melhor resultado diz que $\frac{2}{5}$ dos zeros não triviais de ζ satisfazem a conjectura.

Os Problemas Propostos por Hilbert:

A famosa lista do final do século XIX, com o intuito de nortear a pesquisa matemática no século XX.

Algumas foram resolvidas, outras estão ainda em aberto, e certas questões são indecidíveis. Isto mostra as conquistas e as limitações dos matemáticos.

Uma cópia do seu discurso, bem como os problemas, pode ser encontrada em

<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/hilbert/toc.html>

Problema 7.3 (Problema n^o18 de Hilbert)

Será que em cada \mathbb{R}^n há uma quantidade finita de grupos finitos de isometrias?

Sim, segundo Bierbach, 1910.

Pode-se consultar “A Conjectura de Kepler - anunciada a resolução do 18^o Problema de Hilbert”, em <http://athena.mat.ufrgs.br/~portosil/novidade.html>

A Conjectura de Koethe:

Conjectura 7.4 *Todo nil ideal à direita de um anel está contido num ideal bilateral nil.*

Este é um problema que resiste aos intentos de solução pelos matemáticos desde a década de 1940.

Parece ser um dos mais difíceis de ser resolvidos.

Existem mais de 50 equivalências desta conjectura.

Problemas Milionários:

“*Millenium Prize Problems*”. O “*Clay Mathematics Institute*” oferece um milhão de dólares para a solução de qualquer um dos seguintes problemas, os quais, cogita-se, terão importante papel no desenvolvimento da Matemática do século XXI:

- Resolução das equações de Navier-Stokes (± 1830)
- Hipótese de Riemann (1859)
- Conjectura de Poincaré (1904)
- Conjectura de Hodge (1950)
- Resolução das equações de Yang-Mills (1950)

- Conjectura de Birch e Swinnerton-Dyer (1965)
- Problema de P versus NP (1971)

<http://www.claymath.org/prizeproblems/index.htm>

<http://athena.mat.ufrgs.br/~portosil/novidade.html>

“Faber’s Challenge”: a editora Faber and Faber pagará, com algumas restrições, um milhão de dólares para quem resolver a Conjectura de Goldbach (1742):

Conjectura 7.5 *Todo número par maior ou igual a 4 pode ser escrito como soma de dois primos.*

Livros:

Depois do sucesso de vendas de “O Último Teorema de Fermat” - S. Singh, Record - os editores viram um mercado ainda não explorado. É nítido que há um desejo (ou tentativa) de popularizar esta questão. Porém, precisam da colaboração dos matemáticos.

Isto já foi evidenciado em “O Teorema do Papagaio” - D. Guedj, Companhia das Letras.

Agora foi lançado o “Tio Petros e a Conjectura de Goldbach” - A. Doxiadis, Faber & Faber, que recentemente chegou ao Brasil.

Para saber mais, http://www.faber.co.uk/faber/million_dollar.asp?PGE=faber&TAG=&CID=

A melhor aproximação numérica que conheço vai até $3 \cdot 10^{15}$: <http://www.ieeta.pt/~tos/goldbach.html>

Um resumo dos mais importantes resultados teóricos obtidos para a questão está em P. Ribenboim (RMU) ou no livro *“The New Book of Prime Number Records”*, do mesmo autor.

Uma versão mais fraca já está estabelecida a menos da Hipótese de Riemann.

Conjectura 7.6 *Todo número ímpar maior ou igual a 7 pode ser escrito como soma de três primos.*

Alguns problemas de formulação elementar:

Muitas das questões anteriores exigem conhecimentos de pós-graduação em certas áreas apenas para serem compreendidas.

Questões cujas idéias envolvidas são simples, mas que a solução parece inalcançável até para os maiores teóricos, podem estimular o anseio de obter conhecimento.

Em geral, a Teoria dos Números ganha neste terreno. A aritmética elementar é a porta de entrada da Matemática para qualquer pessoa, por isso é natural incluir questões como

Conjectura de Catalan (meados do século XIX):

Conjectura 7.7 *São $8 (= 2^3)$ e $9 (= 3^2)$ as únicas potências consecutivas?*

Ribenboim escreveu um livro inteiro dedicado ao problema. Há outro artigo dele na RMU.

<http://catalan.ensor.org/>

Outras questões elementares, especialmente referentes a primalidade, podem ser encontradas no livro “*The New Book of Prime Number Records*”, do Ribenboim.

Vale consultar ainda o livro “*Unsolved Problems in Number Theory*”, de R.K. Guy, da Springer-Verlag.

Há outro livro “*Unsolved Problems in Elementary Geometry*”, também da Springer.

Por fim, um site com problemas de formulação elementar:

<http://abel.math.umu.se/~frankw/unsolved.html>

Ainda, a lista dos ganhadores da Medalha Fields:

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Societies/FieldsMedal.html>