

Passeios de Euler e as pontes de Königsberg

João Carlos V. Sampaio
UFSCar
sampaio@dm.ufscar.br

Königsberg era uma cidade da antiga Prússia, hoje chamada Kaliningrado, na atual Rússia. Na parte central de Königsberg, fluíam vertentes do rio Pregel, formando uma ilha. Sete pontes, interligando partes da cidade, foram construídas, como representado na figura abaixo.

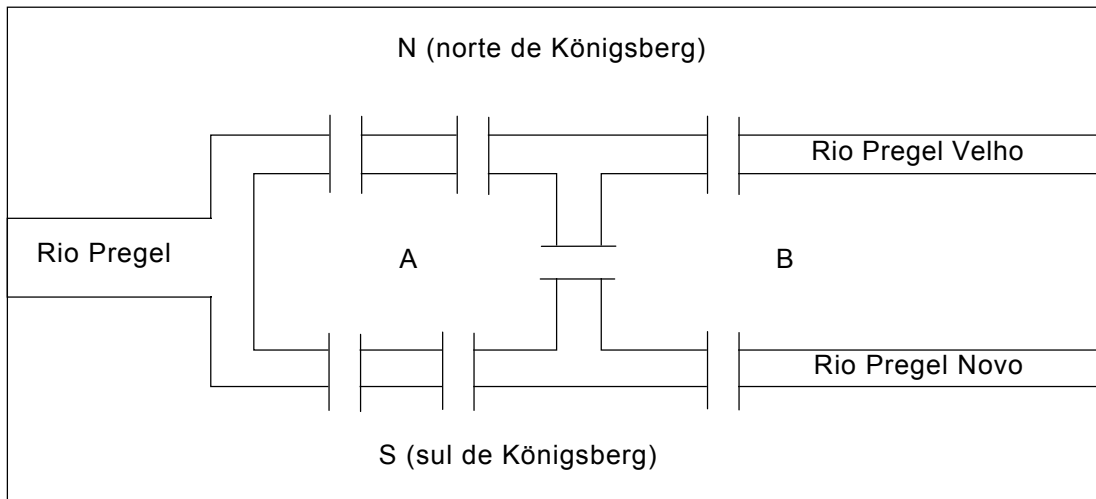


Figura 1. Diagrama das sete pontes de Königsberg.

Um desafio, proposto pelos habitantes de Königsberg, era fazer um passeio, passando pelas sete pontes, porém apenas uma vez sobre cada ponte. Tente traçar, a lápis, um caminho realizando esse passeio.

Um matemático suíço, de nome Leonhard Euler (leia-se “Óiler”), em 1736, não somente elucidou a natureza desse problema, como acabou por criar uma teoria que se aplica a vários problemas desse tipo.

Euler pensou: “este é um tipo de problema no qual as distâncias envolvidas são irrelevantes. O que importa é como as várias porções de terra estão interligadas entre si.”

Euler queria dizer que este problema pode ser pensado, geometricamente, da seguinte maneira. Há quatro porções de terra envolvidas, separadas umas das outras pelas águas do rio Pregel. São elas: N (norte), S (sul), A (ilha central) e B (leste), como na Figura 1. Um diagrama, representando as várias interligações entre essas porções de terra, é mostrado na Figura 2. Esse diagrama é um exemplo de um “grafo”.

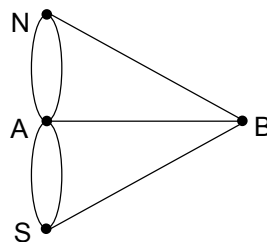


Figura 2. O grafo das sete pontes de Königsberg.

Um grafo é uma figura, constituída de um número finito de arcos (ou curvas), chamadas “arcos” ou “arestas” do grafo, cujas extremidades são chamadas de “vértices” do grafo. Um mesmo vértice pode pertencer a vários arcos, e dois arcos só podem ter em comum um ou dois vértices de suas extremidades. As duas extremidades de um arco podem coincidir, dando lugar a um único vértice (esquerda da Figura 3a). Um grafo pode ter uma configuração espacial, como o grafo das arestas e vértices de um cubo (Figura 3b). Se um grafo pode ser deformado – esticando-se, encolhendo-se, ou deformando-se suas arestas –, de modo a ser desenhado num plano, ele é chamado um “grafo planar”. As arestas de um cubo formam um grafo planar, que pode ser representado como na Figura 3c.

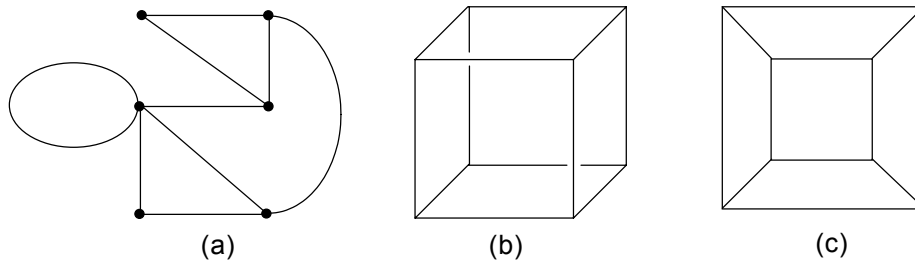


Figura 3. (a) Um grafo, no qual as duas extremidades de um arco coincidem; (b) grafo das arestas de um cubo; (c) grafo planar das arestas de um cubo.

Um caminho, num grafo, consiste numa seqüência de arcos do grafo, construída de tal modo que, dois arcos consecutivos da seqüência tem ao menos um vértice em comum e, nessa seqüência, não aparecem arcos repetidos.

Tendo-se um caminho em um grafo, cada arco desse caminho fica “orientado”, passando a ter um vértice inicial e um vértice final, de modo que, se a e b são dois arcos consecutivos do caminho, o vértice final de a é o vértice inicial de b . Além disso o caminho terá um vértice inicial – o seu ponto de partida –, e um vértice final – o seu ponto de chegada. Quando os vértices inicial e final, de um caminho, coincidem, dizemos que o caminho é fechado.

Diremos que um grafo é conexo se, para cada dois quaisquer de seus vértices A e B , existe, no grafo, um caminho, tendo A como vértice inicial e B como vértice final. Todos os grafos que consideraremos aqui são conexos.

Diremos que um grafo admite um “passeio de Euler” se existe, nesse grafo, um caminho, do qual fazem parte todas as arestas do grafo. Isto significa que um ponto móvel pode “passar” pelas arestas do gráfico, percorrendo todas elas, passando somente uma vez através de cada uma.

Na maior parte deste texto, consideraremos apenas gráficos planares. Um gráfico planar admite um passeio de Euler quando podemos desenhá-lo, sem tirar o lápis do papel, passando o lápis uma única vez em cada aresta. Alguns dos grafos da Figura 4 admitem passeios de Euler. Tente traçá-los sem tirar o lápis do papel.

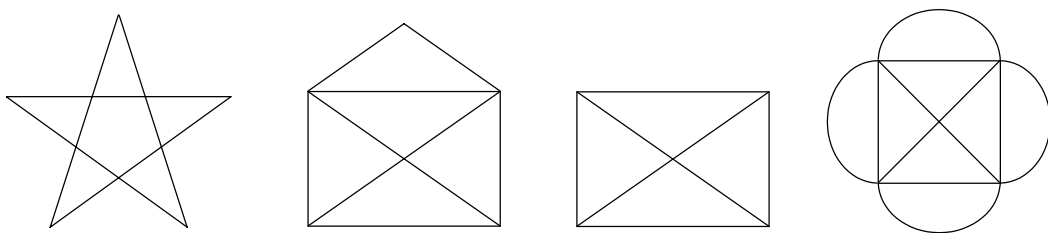


Figura 4. Quais destas figuras podemos fazer, com um único traço, sem tirar o lápis do papel, passando o lápis só uma vez em cada traço?

Quando traçamos um grafo no papel, podemos supor que são vértices todos os pontos onde duas ou mais curvas se cruzam ou se encontram.

De modo a elucidar o problema das pontes de Königsberg e dos passeios de Euler em geral, introduziremos o conceito de “ordem de um vértice”. A ordem de um vértice, num grafo, é o número de extremidades de arestas que se apoiam naquele vértice. Assim, por exemplo, no grafo da Figura 5, os vértices A, B e C tem ordens 5, 2 e 3, respectivamente (confira).

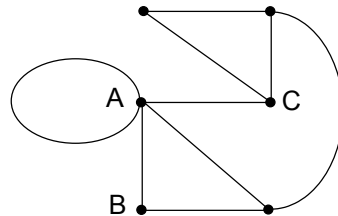


Figura 5. Cinco extremidades de arcos apoiam-se em A e duas em B. Três extremidades apoiam-se em C.

Passaremos agora aos resultados principais sobre passeios de Euler.

Teorema 1. *Se um grafo planar admite um passeio de Euler, começando e terminando num mesmo vértice, então todo vértice desse grafo tem ordem par.*

Demonstração. Considere um vértice qualquer do grafo, digamos A, e suponhamos que ele é um vértice intermediário (nem final, nem inicial) do passeio. Então, cada vez que chegamos em A, através de uma aresta do passeio, partimos de A logo em seguida, e assim, contadas as chegadas e partidas, teremos um número par de arestas apoiando-se em A (Figura 6a). Suponhamos agora que B é o vértice inicial e final do passeio. Então, calculando a ordem de B, contamos 1 na partida, mais 1 na chegada, e somamos 2 cada vez que passamos por B (podemos, ao longo do passeio, passar diversas vezes por B). Logo, B é também um vértice par.

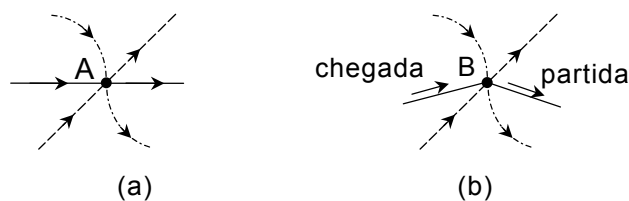


Figura 6.

Teorema 2. *Se um grafo planar admite um passeio de Euler, começando num vértice e terminando em outro, então os vértices final e inicial do passeio são ímpares, e todos os demais vértices do grafo tem ordem par.*

Demonstração. Se um vértice não é o fim nem o início do passeio então, toda vez que chegamos a ele no passeio, partimos em seguida, e assim haverá um número par de arestas nele se apoiando. Se C é o vértice inicial do passeio, então, ao calcular sua ordem, contamos 1 quando partimos de C, e somamos 2 cada vez que passamos por C. Assim, C é um vértice ímpar. Da mesma forma, para o vértice D, final do passeio, somamos 2 cada vez que passamos por ele e mais 1 na chegada, sendo D, portanto, também um vértice ímpar.

Em vista dos dois teoremas acima, fica fácil agora saber quais dos grafos já vistos admitem passeios de Euler. Igualmente fácil é determinar se o problema das pontes de Königsberg tem ou não solução.

Verificaremos agora que, reciprocamente, todo grafo planar, com todas arestas pares, ou apenas duas ímpares, admite um passeio de Euler. Como veremos, a demonstração desse fato nos provê uma estratégia para a construção de um passeio de Euler, quando o grafo o admite.

Para desenvolver sensibilidade a respeito de como construir um passeio de Euler, num grafo em que todas as arestas são pares, consideraremos o grafo da figura 7a, no qual os vértices são os “cantos” dos retângulos e as interseções entre linhas. Como podemos notar, este é um exemplo simples de um grafo cujos vértices tem ordem par. A fim de desenvolvermos nele um passeio de Euler, vamos dividi-lo em três partes, como em 7b. Cada uma das partes é desenhada com um passeio de Euler, isto é, podemos traçar o círculo e os dois retângulos, separadamente, sem tirarmos o lápis do papel. Podemos traçar, em 7b, primeiramente o retângulo mais longo, depois a parte circular, e finalmente o retângulo à direita. A partir desses passeios preliminares, podemos construir um passeio de Euler em todo o grafo da seguinte maneira:

Escolhemos um vértice inicial A, como na Figura 7b, e percorremos o primeiro retângulo até encontrarmos o vértice B, interseção desse retângulo com o círculo. Passamos então a percorrer o círculo a partir do ponto B, como em 7b, até encontrarmos o segundo retângulo num vértice C. Abandonamos o círculo e passamos a contornar o segundo retângulo, como em 7c. Quando terminarmos de contornar este retângulo, estaremos novamente em C. Retomamos então o contorno circular, até reencontrarmos o vértice B, como na Figura 7d, e então finalizamos o contorno do primeiro retângulo, retomando-o a partir do vértice B. Deste modo, percorremos todo o grafo em 7a, através de um passeio de Euler, tendo o vértice A como final e inicial.

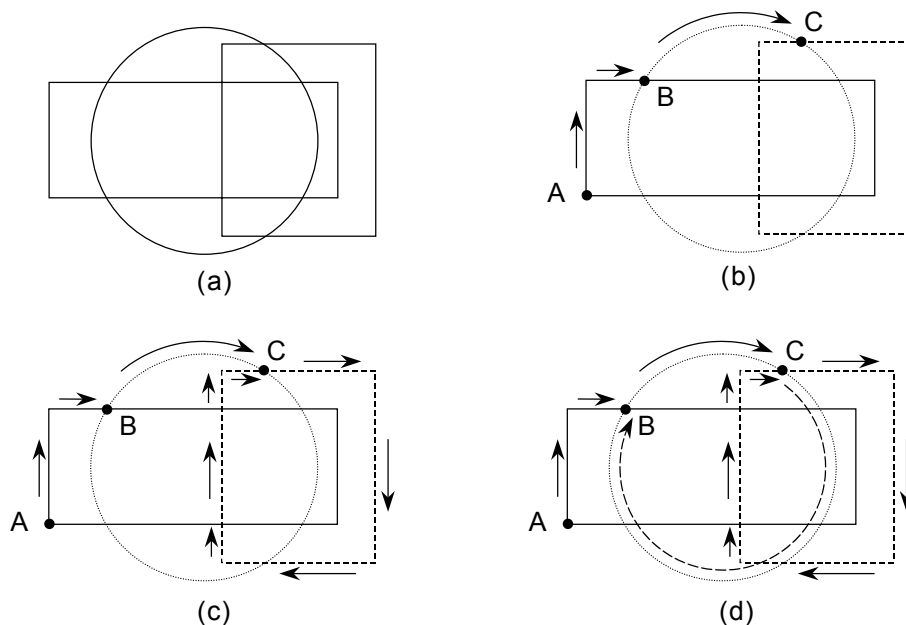


Figura 7.

Teorema 3. *Se um grafo tem seus vértices todos pares, então ele admite um passeio de Euler. Além disso, esse passeio pode começar (e terminar) em qualquer vértice previamente escolhido. O primeiro arco do caminho pode ser qualquer arco partindo desse vértice.*

Teorema 4. *Se um grafo tem dois vértices ímpares e os demais todos pares, então ele admite um passeio de Euler. Esse passeio deve começar em um dos vértices ímpares e terminar no outro.*

A demonstração de ambos os teoremas é dada no final do texto. Antes de tentar acompanhá-la, tente construir passeios de Euler nos grafos da Figura 8. Verifique, em cada caso, se o grafo satisfaz as hipóteses de um dos teoremas 3 e 4.

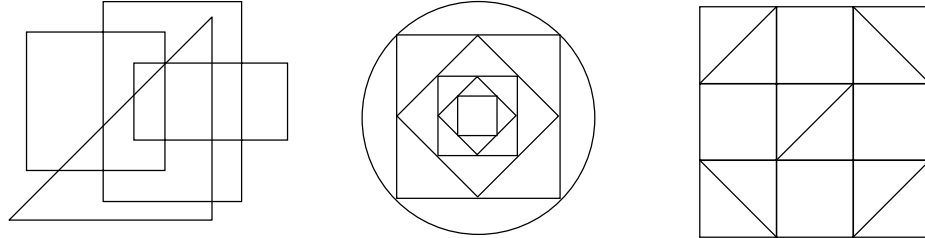


Figura 8. Quais desses desenhos podem ser feitos, sem precisarmos tirar o lápis do papel?

Demonstração do teorema 3. (Leia com muita calma. Não desista de tentar entender. Se necessário, faça desenhos para acompanhar o raciocínio.) Consideremos um grafo em que cada um dos vértices tem ordem par. Tomemos nele um vértice A_0 . Seja a_1 uma aresta saindo de A_0 e chegando em A_1 . Se $A_1 = A_0$, paramos por aqui (podemos ter $A_1 = A_0$). Se $A_1 \neq A_0$ então, como A_1 é um vértice par, existe uma aresta a_2 , saindo de A_1 e chegando em A_2 , $a_2 \neq a_1$. Se $A_2 = A_0$, paramos por aqui. Se $A_2 \neq A_0$, prosseguimos. Existe uma aresta a_3 saindo de A_2 e chegando em A_3 , sendo $a_3 \neq a_0$ e $a_3 \neq a_1$. Assim prosseguindo, construímos uma seqüência de arcos a_1, a_2 , etc., até que não nos seja mais possível continuar, ou seja, até que cheguemos num vértice A_n , do qual não tenhamos mais saída. Deveremos ter então $A_n = A_0$ pois, caso contrário, chegaremos no vértice A_n sem podermos sair dele, após termos passado por ele (chegando e saindo) um certo número de vezes, e então A_n será um vértice de ordem ímpar. Assim, o caminho a_1, a_2, \dots, a_n é um caminho fechado iniciando-se e terminando-se em A_0 . Se este caminho contém todas as arestas do grafo, então nosso passeio de Euler está pronto. Se este caminho não contém todas as arestas do grafo então, como o grafo é conexo, de algum dos vértices A_0, A_1, \dots, A_{n-1} , digamos de um vértice A_s , parte um arco b_1 do grafo, estando b_1 fora do caminho a_1, a_2, \dots, a_n . O arco b_1 sai de $B_0 = A_s$, chegando a B_1 . Se $B_1 \neq B_0$, existe uma aresta b_2 , fora do caminho a_1, a_2, \dots, a_n , saindo de B_1 e chegando em B_2 . Repetindo o procedimento anterior, usado para construir o caminho fechado a_1, a_2, \dots, a_n , construímos um caminho fechado b_1, b_2, \dots, b_m , sendo $B_0 = A_s$ o ponto de partida e de chegada, com os arcos b_1, b_2, \dots, b_m todos fora do caminho a_1, a_2, \dots, a_n . "Inserimos" então o caminho b_1, b_2, \dots, b_m no caminho a_1, a_2, \dots, a_n , através do vértice A_s , obtendo um caminho fechado aumentado, $a_1, a_2, \dots, a_s, b_1, b_2, \dots, b_m, a_{s+1}, \dots, a_n$.

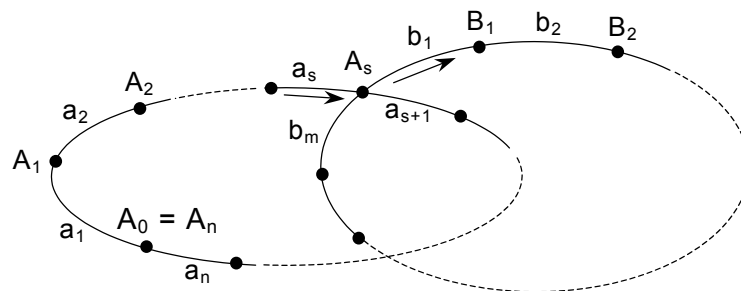


Figura 9. A partir do vértice A_s , o caminho fechado b_1, b_2, \dots, b_m é "inserido", e então prosseguimos no caminho anterior, através da aresta a_{s+1} .

Se este caminho é um passeio de Euler através de todo o grafo, terminamos nossa tarefa. Se não for, novas ampliações, por novas "inserções" de caminhos, através de vértices dos caminhos fechados anteriormente construídos, acabarão por esgotar todas as arestas do grafo, provendo-nos um passeio de Euler pelo grafo.

Demonstração do teorema 4. Chame de A e B os dois vértices ímpares do grafo. Amplie o grafo criando uma nova aresta a, de vértices A e B (este novo grafo pode não ser planar, pois pode ser necessário inserir a nova aresta, especialmente, "por cima" das demais). Com a inserção da nova aresta, os vértices A e B tornam-se vértices pares. O teorema 3 também é válido para grafos não planares, com todos os vértices pares (a restrição feita, a grafos planares, é feita exclusivamente pelo interesse em passeios de "lápis e papel"). Podemos então, no novo grafo, iniciar um passeio de Euler, partindo de B, caminhando inicialmente de B a A, pela aresta a, e terminar o passeio em B. Concluído o passeio, descartamos a aresta a, e teremos então um passeio de Euler, iniciando-se em A e finalizando-se em B.

Finalizaremos este texto com duas observações adicionais.

1. Pode se demonstrado que, se o número de vértices ímpares de um grafo conexo é igual a $2n$, então n (e não menos que n) passeios de Euler são necessários e suficientes para passearmos por todo o grafo, passando uma vez por cada aresta.
2. Todo grafo conexo tem um número par de vértices ímpares. Assim, é impossível construirmos um grafo conexo com 1, 3, 5, etc., vértices ímpares. Este fato decorre das seguintes observações. O total de extremidades de arcos é um número par, pois cada arco contribui com duas extremidades. Nesse total, contam-se as extremidades que se apoiam em vértices pares e as que se apoiam em vértices ímpares. Os vértices pares obviamente contribuem com um número par de extremidades de arestas. Suponha que temos, no grafo, um número ímpar de vértices ímpares. Através da soma de uma quantidade ímpar de números ímpares, totalizaremos, como um número ímpar, o total de extremidades de arestas que se apoiam em vértices ímpares. Como *par + ímpar = ímpar*, nossa última suposição cai por terra, e portanto o grafo possui um número par de vértices ímpares.

Referências.

- [1] Arnold, B.E., *Intuitive Concepts in Elementary Topology*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1963.
- [2] Toth, G., *Glimpses of Algebra and Geometry*, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [3] Euler, L., "The Koenigsberg Bridges", em *Mathematics and The Modern World*, W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1968.